Ejercicio 1A Junio (mod 1) 2022 (Análisis)

Considera la función continua f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < -1 \\ ax + b & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$.

(a) Calcula a y b. (1 punto)
(b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. (1'5 puntos)

Solución

(a)
Calcula a y b.

Como la función es continua en R, en particular en continua en x = -1 y x = 1.

Como f(x) es continua en x = -1 tenemos $f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (1/x) = 1/(-1) = -1.$

$f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (ax + b) = -a + b$

Igualando tenemos -1 = -a + b.

Como f(x) es continua en x = 1 tenemos $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax + b) = a + b$

$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x^2}{x+1}\right) = \dfrac{1^2}{1+1} = 1/2.$

Igualando tenemos 1/2 = a + b.

Resolvemos $\begin{cases} -a+b=-1 \\ a+b=1/2 \end{cases}$. .Sumando 2b = -1/2, de donde **b = -1/4**; con lo cual **a =** 1/2 + 1/4 **= 3/4.**

(b)
Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

Sabemos que la rama 1/x tiene una asíntota vertical en x = 0, pero **x = 0 no está en el dominio x < -1.**

Como $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 1/(-\infty) = 0^-$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal de 1/x en -∞ y la gráfica de 1/x está por debajo de la asíntota.**

Sabemos que la rama $\dfrac{x^2}{x+1}$ definida en x ≥ 1, tiene una asíntota vertical en x = -1, pero **x = -1 no está en el dominio x ≥ 1.**

Como la rama $\dfrac{x^2}{x+1}$ es un cociente de funciones polinómicas con el numerador un grado más que el denominador, **tenemos una asíntota oblicua y = mx + n en +∞**, con $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$.

Tenemos $m = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{(x+1)\cdot x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (1) = 1.$

$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2 - x^2 - x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-x}{x}\right) = -1.$

La asíntota oblicua de f en +∞ es y = mx + n **= x – 1.**

Como $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx + n)) = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - (x-1)\right)$ **= 0+, la rama** $\dfrac{x^2}{x+1}$ **está por encima de la asíntota oblicua y = x – 1 en + ∞.**

Ejercicio 2A Junio (mod 1) 2022 (Análisis)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones f, g:R→R, definidas por $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$.

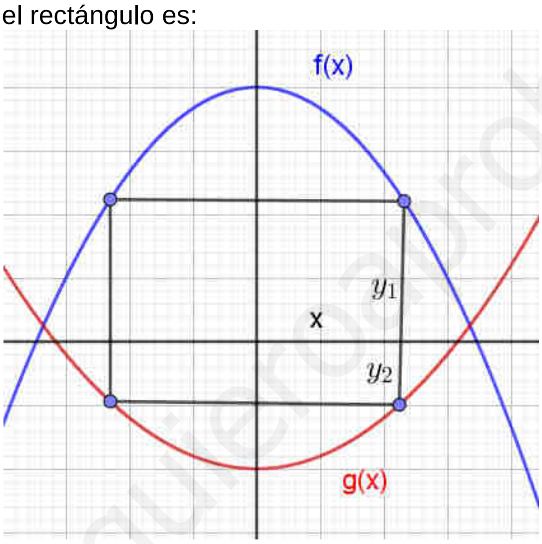
Solución

La gráfica $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ es la de una parábola de la forma (∩), pues el número que multiplica a x^2 es negativo, con abscisa del vértice en la solución de $f'(x) = 0 = -2x/3$, de donde $x = 0$ y el vértice es V(0, 4). Corta al eje OX en $x = \pm\sqrt{(12)}$ (soluciones de $4 - x^2/3 = 0 \rightarrow x^2 = 12$).

La gráfica de $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$ es la de una parábola con las ramas hacia arriba ∪ (el nº que multiplica a x^2 es positivo), con abscisa del vértice en el número que anula la 1ª derivada, es decir $g'(x) = 2x/6 = 0$, de donde $x = 0$ y el vértice es V'(0, -2). Corta al eje OX en $x = \pm\sqrt{12}$ (soluciones de $x^2/6 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 12$).

Cortes entre ellas: Vemos que se cortan en el eje de abscisas en $x = \pm\sqrt{(12)}$.

Un esbozo de las parábolas y del rectángulo es:



Observando la figura **el rectángulo tiene de base** $a = x + x =$ **$2x$ y de altura b** $= y_1 - y_2 =$
$= (4 - x^2/3) + (x^2/6 - 2) =$ **$2 - x^2/6$**.

Función a optimizar: $A(x) = \text{Área} = (\text{base})\cdot(\text{altura}) = (2x)\cdot(2 - x^2/6) = 4x - x^3/3$.

Optimizamos: $A'(x) = 4 - x^2 = 0$, de donde $x^2 = 4 \rightarrow x = 2$ (la solución negativa $x = -2$, no sirve pues "x" es una longitud)
Como $A''(x) = -2x$ y $A''(2) = -2(2) = -4 < 0$, **$x = 2$ es un máximo relativo**.

Como la abscisa es $x = 2$, la ordenada $y_1(2) = (4 - 4/3) = 8/3$ e $y_2(2) = (4/6 - 2) = -4/3$, pero tiene que ser positiva 4/3 porque es una longitud.

Las dimensiones del rectángulo son: base = $2(2) = 2\cdot 2$ **$= 4\ u^1$ y altura =** $y_1(2) + |y_2(2)| = 8/3 + (-4/3)/6$ u1 $=$ **$12/3\ u^1 = 4\ u^1$**

El área máxima es $A = (4\ u^1)\cdot(4\ u^1) = 16\ u^2$.

Ejercicio 3A Junio (mod 1) 2022 (Análisis)

Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

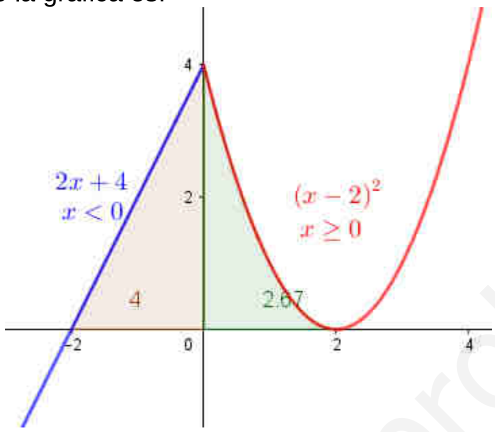
(a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. (1 punto)
(b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas. (1'5 puntos)

Solución

(a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función.

Si $x < 0$, $f(x) = 2x + 4$.
De $f(x) = 0 \rightarrow 2x + 4 = 0$ luego $x = -2$ y el punto es $(-2, 0)$.
Su gráfica es una recta que pasa por $(-2, 0)$ y $(0^-, 4)$.

Si $x \geq 0$, $f(x) = (x – 2)^2$.
De $f(x) = 0 \rightarrow x - 4 = 0$ luego $x = 2$ (doble) y el punto es $(2, 0)$
Su gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia arriba $\cup$ (el nº que multiplica a x^2 es positivo), con abscisa del vértice en el número que anula la 1ª derivada, es decir $f'(x) = 2(x – 2) = 0$, de donde $x = 2$ y el vértice es $V(2, 0)$. Pasa por los puntos $(0, 4)$ y $(4, 4)$.
Con todo lo anterior un esbozo de la gráfica es:



(b)
Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas.

Vemos que el área es la de un triángulo rectángulo (entre -2 y 0) más la de un trozo de párabola (entre 0 y 2)

El área pedida es $(1/2)\cdot(\text{base})\cdot(\text{altura}) + \int_0^2 (x-2)^2 dx = (1/2)\cdot(2)\cdot(4) + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2$ = **4 + (0 - (-2)³/3 u² =**

= 20/3 u² ≅ 6’66667 u².

Ejercicio 4A Junio (mod 1) 2022 (Análisis)

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$ para $x \neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2, 6)$.

Solución

Calculamos primero la integral indefinida.

Como el numerador es de grado mayor o igual que el denominador tengo que realizar la división entera primero:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 2x^2 - x & x + 2 \\ \hline
\quad 2x^2 - x & \\
\quad -2x^2 + 4x - 2 & \\ \hline
\qquad 3x - 2 &
\end{array}$$

$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} dx = \int (\text{Cociente}) dx + \int \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}} dx = \int (x+2) dx + \int \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 1} dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) + I.$$

$$I = \int \frac{(3x-2)\cdot dx}{x^2 - 2x + 1} = \int \frac{(3x-2)\cdot dx}{(x-1)^2} = \{\text{Una raíz doble } (+1)\} = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{(x-1)^2} dx = A\cdot \ln|x+1| - \frac{B}{x-1} + K = \{++\} =$$

$$\{++\} = 3\cdot \ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + K$$

{++} Calculamos A y B

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

Igualando numeradores:

3x - 2 = A(x - 1) + B. Sustituimos “x” por el valor de las raíces del denominador, y le damos otro valor.

Para x = 1, 1 = B $\rightarrow$ B = 1.
Tomo x = 0, -2 = A(-1) + (1) $\rightarrow$ A = 2 + 1 = 3.

Un primitiva de f es F(x) = $x^2/2 + 2x + I = x^2/2 + 2x + 3\cdot\ln|x-1| - 1/(x-1) + K$.

La primitiva que pasa por el punto (2, 6) verifica F(2) = 6.

De F(2) = 6 $\rightarrow$ 6 = $(2)^2/2 + 2(2) + 3\cdot\ln|(2)-1| + 1/(2-1) + K = 2 + 4 + 3\cdot 0 - 1 + K = 5 + K$, de donde resulta que K = 6 – 5 = 1 y la primitiva pedida es: **F(x) = $x^2/2 + 3x + 3\cdot\ln|x-1| - 1/(x-1) + 1$.**

Ejercicio 5B Junio (mod 1) 2022 (Algebra)

Considera el sistema: $\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$.

a) Discute el sistema según los valores de m. (1’75 puntos)
b) Para m = 2 resuelve el sistema, si es posible. (0’75 puntos)

Solución

Considera el sistema: $\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$.

(a)
Discute el sistema según los valores de m.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes para ver para que valores de m hace cero dicho determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = -(-3)\cdot(-1+m^2) = 3\cdot(-1+m^2)\cdot$$

Si |A| = 0, tenemos $(-1 + m^2) = 0$, de donde $m^2 = 1$ y $m = \pm 1$.

Si m $\neq$ -1 y m $\neq$ 1, |A| $\neq$ 0 luego rango (A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas, y por el Teorema de Rouchè **el sistema es compatible y determinado y tiene solución única**.

Si m = -1, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas proporcionales, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, (más de una).

Si m = 1, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix}$ Ajuntos primera columna $= 1\cdot(-6-6) = -12 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 ≠ 3 = rango(A*)**, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es incompatible y no tiene solución.**

(b)

Para m = 2 resuelve el sistema, si es posible.

Hemos visto en el apartado (a) que **para m = 2 (m ≠ ±1),** teníamos **rango (A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas, y** por el Teorema de Rouchè **el sistema es compatible y determinado y tiene solución única**.

Lo resolvemos por Gauss:

Tenemos $\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ -2x + 3y - 1z = 1 \quad (E_2+2E_1) \\ x - 4y + 2z = -6 \quad (E_3-E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ +y + 3z = -5 \\ -3y + 0 = -3 \end{cases}$, de donde $y = 1$, $3z = -5 - 1 = -6 \to z = -2$, y de $x - 1 - 4 = -3 \to x = 2$, luego la única solución del sistema para m = 2 es: **(x, y, z) = (2, 1, -2).**

Ejercicio 6B Junio (mod 1) 2022 (Algebra)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A. (1' puntos

b) Para m = 4 resuelve, si es posible, la ecuación matricial $A\cdot X = 12\cdot I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (1'5 puntos)

Solución

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

(a)

¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{m}\cdot\sqrt{m} & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Saco de} \\ \text{la 1ª fila} \\ \sqrt{m} \end{matrix} = \sqrt{m}\cdot\begin{vmatrix} \sqrt{m} & 1 & 1 \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Saco de} \\ \text{la 1ª columna} \\ \sqrt{m} \end{matrix} = \sqrt{m}\cdot\sqrt{m}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$= m\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = m\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = m\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = m\cdot(m-1)\cdot(m-1) = m\cdot(m-1)^2.$$

Tenemos que si m = 0 y m = 1, |A| = 0 y A no tiene inversa.

Si m ≠ 0 y m ≠ 1, |A| ≠ 0 y la matriz A tiene inversa $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|}$ **.**

(b)

Para m = 4 resuelve, si es posible, la ecuación matricial $A\cdot X = 12\cdot I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Para m = 4, $A=\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{4} & \sqrt{4} \\ \sqrt{4} & 4 & 1 \\ \sqrt{4} & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $|A| = 4\cdot(4 - 1)\cdot(4 - 1) = 36$, $A^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$Adj(A^t)= \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, $A^{-1}= \dfrac{Adj(A)^t}{|A|} = \dfrac{1}{36}\cdot\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Multiplicando la expresión $A\cdot X = 12\cdot I$, por la izquierda, por la matriz $A^{-1} \to A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot 12\cdot I \to$
$\to I\cdot X = 12\cdot A^{-1}\cdot I \to$ $\mathbf{X = 12\cdot A^{-1}}$.

Por tanto $\mathbf{X = 12\cdot A^{-1}} = 12\cdot\dfrac{1}{36}\cdot\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7 Junio (mod 1) 2022 (Geometría)

Considera los vectores **u** = (-1, 2, 3) y **v** = (2, 0, -1), así como el punto A(-4, 4, 7).
a) Calcula a y b para que el vector **w** = (1, a, b) sea ortogonal a **u** y **v**. (0’75 puntos)
b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de **u** y **v**, y que tiene el vector **OA** como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. (1’75 puntos)

Solución

Considera los vectores **u** = (-1, 2, 3) y **v** = (2, 0, -1), así como el punto A(-4, 4, 7).
(a)
Calcula a y b para que el vector **w** = (1, a, b) sea ortogonal a **u** y **v**.

Si **w** es ortogonal a **u** y **v**, el producto escalar de **w** con **u** y **v** es cero.

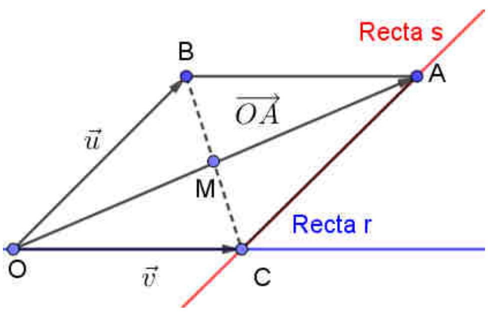
De **w•u** = 0 = (1, a, b)•(-1, 2, 3) = -1 + 2a + 3b = 0.

De **w•v** = 0 = (1, a, b)•(2, 0, -1) = 2 + 0 - b = 0, de donde **b = 2.**

Luego de -1 + 2a + 3(2) = 0 → 2a = -5, de donde **a = -5/2.**
(b)
Resuelto por D. Joaquín González Giráldez, Profesor del Colegio Salesiano San Pedro de Sevilla

Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de **u** y **v**, y que tiene el vector **OA** como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas.

Un pequeño dibujo nos ayudará



Dos vértices del paralelogramo **son O(0 0, 0) y A(-4, 4, 7).**

El punto medio de la diagonal OA es M(-4/2, 4/2, 7/2) = M(-2, 2, 7/2) .

Formamos las rectar “r” que tiene punto O(0, 0, 0) y vectorv **v**= (2, 0, -1), y la recta “s” que pasa por el punto A(-4, 4, 7) y vector diretor **u** = (-1, 2, 3).

El corte de las rectas r y s es el vértice C.

Tenemos r ≡ (x, y, z) = (2t, 0, -t) con t ∈ R. La recta s r ≡ (x, y, z) = (-4-m, 4+2m, 7+3m) con m ∈ R.

Igualamos miembro a miembro (x = x, y = y, z = z) $\rightarrow \begin{cases} 2t = -4 - m \\ 0 = 4 + 2m \\ -t = 7 + 3m \end{cases}$. Tenemos 0 = 4 + 2m luego $m = -2$.

Entrando en la tercera $\rightarrow$ -t = 7 + 3(-2) = 1, de donde $t = -1$, que verifican la primera ecuación.

El punto C(x, y, z) es C(-2, 0, 1) que es otro vértice.

Para calcular el vértice B tenemos en cuenta que el punto M es el punto medio del segmento BC.

De M(-2, 2, 7/2) = ((-2+x)/2, (0+y)/2, (1+z)/2), de donde x = -4+2 = -2, y=4 y z=7-1 = 6, por tanto **el vértice B es B(x, y, z) = B(-2, 4, 6).**

Los vértices son **O(0 0, 0), A(-4, 4, 7), C(-2, 0, 1) y C(-2, 0, 1).**

Ejercicio 8 Junio (mod 1) 2022 (Geometría)

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$, así como la resta s determinada por el punto P(1, 2, 3) y el vector director **v** = (1 + a, -a, 3a).
a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. (1'5 puntos)
b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. (1 punto)

Solución

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$, así como la resta s determinada por el punto P(1, 2, 3) y el vector director **v** = (1 + a, -a, 3a).
(a)
Calcula a para que las rectas r y s se corten.

De la recta r un punto es A(2, 0, 1) y un vector director es **u** = (1, -1, 2).

De la recta s un punto es P(1, 2, 3) y un vector director es **v** = (1 + a, -a, 3a).

Como los vectores **u** = (1, -1, 2) y **v** = (1 + a, -a, 3a) no son proporcionales (vemos que –a/-1 ≠ 3a/2), las rectas **r y s no son paralelas** y tenemos que estudiar el determinante det(**AP**, **u**, **v**). Si es cero se cortan y si es distinto de cero se cruzan

Como **AP** = (-1, 2, 2), resulta det(**AP**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1+a & -a & 3a \end{vmatrix} C_2+C_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1+a & 1 & 3a \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila =

= -(1)·(3a - 2) – 2·(-1 - 1 - a) = 6 - a.

Si a = 6, det(**AP**, **u**, **v**) **= 0 y las rectas r y s se cortan.**

Si a ≠ 6, det(**AP**, **u**, **v**) **≠ 0 y las rectas r y s se cruzan.**
(b)
Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares.

Las rectas r y s son perpendiculares si lo son sus vectores directores **u** y **v**, es decir si su producto escalar es cero.

r ⊥ s → **u** ⊥ **v** → **u•v** = 0 = (1, -1, 2)•(1+a, -a, 3a) = 1 + 8a = 0, de donde **a = -1/8 para que las rectas sean perpendiculares.**