**EJERCICIO 1.** (2,5 puntos)

Considera la función continua $f$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax+b & \text{si } -1 \le x < 1 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) Calcula $a$ y $b$. (1 punto)

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de $f$. (1,5 puntos)

a) Al tratarse de una función continua, los límites laterales cuando x tiende a −1 y +1 deben de ser los mismos. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x} = -1 \\ \lim_{x\to -1^+} ax+b = -a+b \end{array}\right\}$$

Como f(x) es contínua en $x=-1$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$ ; Luego: $-a+b=-1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} ax+b = a+b \\ \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Como f(x) es contínua en $x=1$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ ; Luego: $a+b = 1/2$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} a-b=1 \\ 2a+2b=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2a-\cancel{2b}=2 \\ 2a+\cancel{2b}=1 \end{array}\right\} \quad 4a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$b = a-1 = \frac{3}{4} - 1 = \frac{-1}{4}$$

Por tanto, para que f(x) sea continua en ℝ, los valores de a y b son 3/4 y −1/4 , respectivamente.

b) Sabemos que la función es continua en ℝ, el dominio será Dom f(x) = ℝ

Las asíntotas verticales se estudian con los límites cuando x tiende a valores nulos del dominio. Al no existir dichos valores, no existirán asíntotas verticales.

Las asíntotas horizontales se determinan cuando el valor de x tiende a extremos infinitos, luego:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital, donde se deriva el numerador y denominador de forma independiente.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty.$$

Luego, existe asíntota horizontal en $y=0$ para $(-\infty,-1)$.

Por último, las asíntotas verticales obedecen la ecuación de la recta $y=mx+n$, obtenida de la división de polinomios:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^2-x & x-1 \\ \quad +x+1 & \\ \hline \quad\quad 1 & \end{array}$$

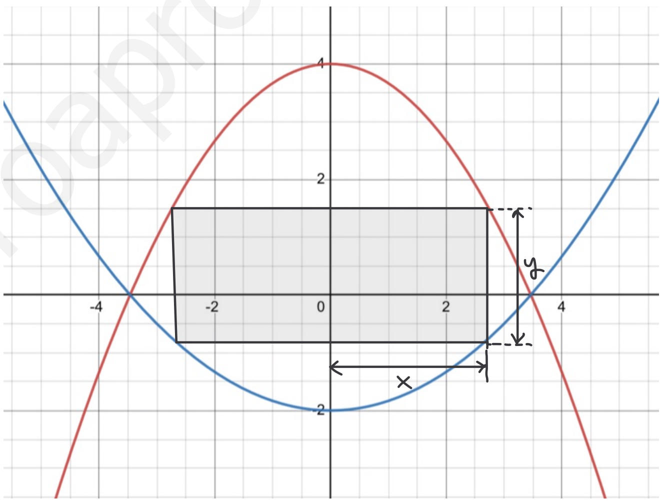
Luego, existe asíntota oblicua para $x\to\infty$ cuya ecuación es $y=x-1$. Cuando $x\to-\infty$ no posee asíntota oblicua debido a que existe horizontal.

**EJERCICIO 2.** **(2,5 puntos)**

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=4-\frac{x^2}{3}$ y $g(x)=\frac{x^2}{6}-2$.

Representaremos las funciones a partir de una tabla de valores, donde:

| x | f(x) | g(x) |
|---|---|---|
| −3 | 1 | −1/2 |
| −2 | 8/3 | −4/3 |
| −1 | 11/3 | −11/6 |
| 0 | 4 | −2 |
| 1 | 11/3 | −11/6 |
| 2 | 8/3 | −4/3 |
| 3 | 1 | −1/2 |




El área del rectángulo viene dada por:

$$A_r = \text{base}\cdot\text{altura} \Rightarrow A_r = 2x\cdot y$$

La altura viene dada por la diferencia de f(x) y g(x), siendo:

$$y = \left(4-\frac{x^2}{3}\right)-\left(\frac{x^2}{6}-2\right) = 4-\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{6}+2 \longrightarrow y = 6-\frac{1}{2}x^2$$

Por tanto:

$$A = 2x\cdot\left(6-\frac{1}{2}x^2\right) \rightarrow A_{máx} = 12x - x^3$$

$$A'_{máx} = 12-3x^2 = 0 \rightarrow -3x^2=-12$$

$$x^2=4$$

$x=\pm 2$; donde la solución $x=-2$ es un resultado aberrante al no existir medidas negativas.

Comprobamos que se trata de un máximo con la segunda derivada.

$$A''_{máx} = -6x = -6\cdot(2) = -12 < 0 \text{ ; luego es un máximo.}$$

Las dimensiones del rectángulo máximo será:

$$x = 2$$
$$y = 6 - \frac{1}{2}x^2 = 6 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 = 6 - 2 = 4$$

Altura = 4 u

Base = 4 u

**EJERCICIO 3. (2,5 puntos)**

Sea $f$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de $f$ con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. **(1 punto)**

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $f$ y por el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**

a) Al tratarse de una función polinómica, $Dom f(x) = \mathbb{R}$.
Determinamos los puntos de corte con los ejes:

Eje OX: $y = 0$

$0 = 2x+4 \rightarrow 2x = -4;\ x = -2 \rightarrow (-2, 0)$

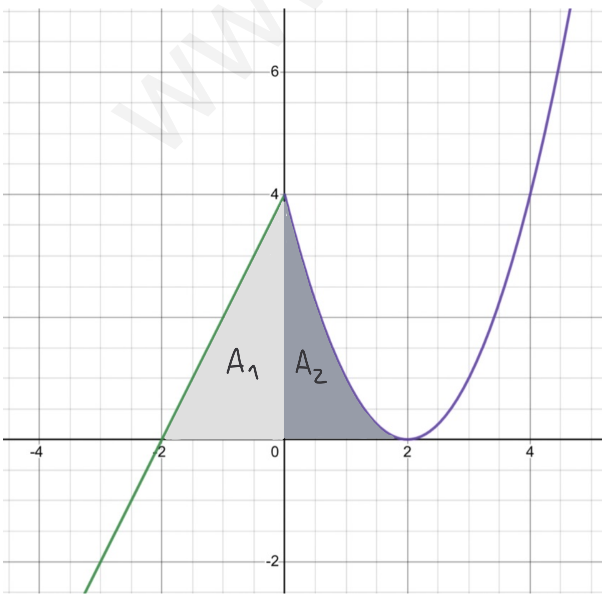
$0 = (x-2)^2 \rightarrow x - 2 = 0;\ x = 2 \rightarrow (2, 0)$

Eje OY: $x = 0$

$y = 2\cdot 0 + 4 \rightarrow (0, 4)$

$y = (0-2)^2 \rightarrow (0, 4)$

Por tanto, la función será:




b) El área viene determinado por:

$$A_T = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0} (2x+4)\,dx + \int_{0}^{2} (x-2)^2\,dx$$

Luego:

$$A = \left(x^2+4x\right]_{-2}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big]_{0}^{2}$$

Aplicando la Regla de Barrow:

$$A = (0+0) - \left((-2)^2 - 4\cdot 2\right) + \left(\frac{2^3}{3} - 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2\right) - (0)$$

$$\boxed{A = \frac{20}{3}\ u^2}$$

**EJERCICIO 4.** **(2,5 puntos)**

Considera la función $f$ definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$ para $x \neq 1$. Halla una primitiva de $f$ que pase por el punto $(2, 6)$.

Al ser una función racional, aplicamos la división de polinomios, ya que el grado del numerador es mayor al del denominador:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -x^3+2x^2-x & x+2 \\ \cline{1-1} \quad 2x^2-x & \\ \quad -2x^2+4x-2 & \\ \cline{1-1} \qquad 3x-2 & \end{array}$$

A partir de la prueba de la división:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx = \int \left(x+2+\frac{3x-2}{x^2-2x+1}\right)dx$$

Aplicamos el método de integración por fracciones simples para el tercer tramo de la integral donde:

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} \rightarrow 3x-2 = A(x-1)+B$$

si $x=1$: $\quad 3-2 = B \rightarrow B=1$

si $x=0$: $\quad -2 = -A+B \rightarrow -2 = -A+1$ ; $A=3$

Por tanto:

$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx = \int \left(x+2+\frac{3}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+2x+3\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

Al pasar por el punto $P(2,6)$:

$$F(2)=6 \rightarrow \frac{2^2}{2}+2\cdot 2+3\cdot\ln|2-1| - \frac{1}{2-1} + C = 6$$

$$2+4+3\cdot\ln 1 - 1 + C = 6$$

$$C = 1.$$

Luego: $\quad F(x) = \dfrac{x^2}{2}+2x+3\cdot\ln|x-1| - \dfrac{1}{x-1} + 1$

**EJERCICIO 5. (2,5 puntos)**

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de $m$. **(1,75 puntos)**

b) Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible. **(0,75 puntos)**

a) Obtenemos los valores de m a partir de la resolución del determinante de la matriz por Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} = 3\cancel{m} + 4m^2 + 1 - 3\cancel{m} - m^2 - 4 = 0$$

$$3m^2 - 3 = 0 \rightarrow m = \pm 1$$

CASO 1: Para $m \neq -1$ y $m \neq 1$.

Como el $Rg(A) = Rg(A^*) =$ nº incógnitas, el sistema será compatible determinado según el teorema de Rouché-Frobenius.

CASO 2: Para $m=-1$

Obtenemos un menor distinto de cero:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 \neq 0 \text{ , luego } Rg(A) = 2$$

$$A^* = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 1 + 12 + 9 + 4 - 6 = 0 \text{ ; luego } Rg(A^*) = 2$$ al compartir un menor.

Como el $Rg(A) = Rg(A^*) \neq$ nº incógnitas, el sistema será compatible indeterminado según el teorema de Rouché-Frobenius.

CASO 3: Para $m = -1$

Obtenemos un menor distinto de cero:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 \neq 0 \text{ , luego } Rg(A) = 2$$

$$A^* = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 1 - 12 + 9 + 4 + 6 = -12 \text{; luego } Rg(A^*) = 3$$

Como el $Rg(A) \neq Rg(A^*)$, el sistema será incompatible según el teorema de Rouché-Frobenius.

b) Redefinimos el sistema para $m=2$:

$$\left.\begin{aligned} x-y+2z&=-3\\ -2x+3y-z&=1\\ x-4y+2z&=-6\end{aligned}\right\}$$

Sabemos que para el valor de $m=2$, el sistema será compatible determinado, por lo que tendrá una única solución. Aplicamos la Regla de Cramer:

donde $|A|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\-2&3&-1\\1&-4&2\end{vmatrix}=4$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-3&-1&2\\1&3&-1\\-6&-4&2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{18}{4}=2 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&-3&2\\-2&1&-1\\1&-6&2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{9}{4}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&-3\\-2&3&1\\1&-4&-6\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-18}{4}=-2$$

Luego: $x=2$, $y=1$, $z=-2$

**EJERCICIO 6. (2,5 puntos)**

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}m&\sqrt{m}&\sqrt{m}\\\sqrt{m}&m&1\\\sqrt{m}&1&m\end{pmatrix}$, donde $m\geq 0$.

a) ¿Para qué valores de $m$ tiene inversa la matriz $A$? **(1 punto)**

b) Para $m=4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX=12I$, donde $I$ es la matriz identidad de orden 3. **(1,5 puntos)**

a) se sabe que una matriz no tiene inversa cuando su determinante es nulo. Por tanto, determinaremos los valores de m que lo hacen nulo a partir de la Regla de Sarrus:

$$|A|=\begin{vmatrix}m&\sqrt{m}&\sqrt{m}\\\sqrt{m}&m&1\\\sqrt{m}&1&m\end{vmatrix}=m^3+m+\cancel{m}-m^2-m^2-\cancel{m}=m^3-2m^2+m=0$$

$$m(m^2-2m+1)=0\rightarrow m=0$$
$$(m-1)^2=0\rightarrow m=1$$

Por tanto, para $m=0$ y $m=1$ la matriz A no tiene inversa.

b) Despejamos X de la ecuación matricial:

$$AX=12\cdot I$$
$$A^{-1}AX=A^{-1}\cdot 12\cdot I$$
$$X=12\cdot A^{-1}$$

donde $A=\begin{pmatrix}4&\pm2&\pm2\\\pm2&4&1\\\pm2&1&4\end{pmatrix}$

La inversa de A viene dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) \quad ; \text{ donde:}$$

$|A| = m^3 - 2m^2 + m$ ; con $m=4$, luego: $|A| = 36$.

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 15 & \pm 6 & \pm 6 \\ \pm 6 & 12 & 0 \\ \pm 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 15 & \pm 6 & \pm 6 \\ \pm 6 & 12 & 0 \\ \pm 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = 12 \cdot A^{-1} = \frac{12}{36} \cdot \begin{pmatrix} 15 & \pm 6 & \pm 6 \\ \pm 6 & 12 & 0 \\ \pm 6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & \pm 2 & \pm 2 \\ \pm 2 & 4 & 0 \\ \pm 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & \pm 2 & \pm 2 \\ \pm 2 & 4 & 0 \\ \pm 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**EJERCICIO 7. (2,5 puntos)**

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

a) Calcula $a$ y $b$ para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo $O$ el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

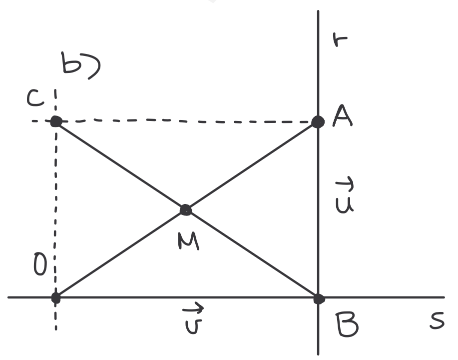
a) Dos vectores son ortogonales o perpendiculares entre sí si su producto escalar es nulo. Luego:

$\vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow (1, a, b) \cdot (-1, 2, 3) = -1 + 2a + 3b = 0 \rightarrow 2a + 3b = 1$

$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (1, a, b) \cdot (2, 0, -1) = 2 - b = 0 \rightarrow b = 2$

Por tanto: $a = \frac{1-3b}{2} = \frac{1-3 \cdot 2}{2} = \frac{-5}{2}$

b)




Determinamos las ecuaciones paramétricas de r y s tal que:

$$r \equiv \begin{Bmatrix} A(-4,4,7) \\ \vec{d_r} = \vec{u} = (-1,2,3) \end{Bmatrix} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -4 - \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases} ; \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s = \begin{Bmatrix} O(0,0,0) \\ \vec{d_s} = \vec{v} = (2,0,-1) \end{Bmatrix} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 0 \\ z = -\mu \end{cases} ; \text{ con } \mu \in \mathbb{R}.$$

El punto de intersección de r y s viene dado por:

$$\begin{aligned} -4-\lambda &= 2\mu \\ 4+2\lambda &= 0 \longrightarrow \lambda = -2 \\ 7+3\lambda &= -\mu \longrightarrow \mu = -7-3\lambda = -7-3\cdot(-2) = -7+6 = -1 \end{aligned}$$

Luego $B(-2,0,1)$.

El punto medio del segmento $\overline{OA}$ es:

$$M = \frac{O+A}{2} = \left(-2, 2, \frac{7}{2}\right)$$

que coincide con el medio de $\overline{BC}$. Luego:

$$M = \frac{B+C}{2} \rightarrow C = 2M - B = 2\left(-2,2,\frac{7}{2}\right) - (-2,0,1) = (-2,4,6)$$

Luego, los puntos del paralelogramo son:

$A(-4,4,7)$ $B(-2,0,1)$ $C(-2,4,6)$ $O(0,0,0)$

**EJERCICIO 8. (2,5 puntos)**

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$, así como la recta $s$ determinada por el punto $P(1,2,3)$ y el vector director $\vec{v} = (1+a, -a, 3a)$.

a) Calcula $a$ para que las rectas $r$ y $s$ se corten. **(1,5 puntos)**

b) Calcula $a$ para que las rectas $r$ y $s$ sean perpendiculares. **(1 punto)**

a) Para que la recta r y s se corten, se tiene que cumplir que $Rg(A) = Rg(A^*) = 2$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} \vec{d_r} \\ \vec{d_s} \end{pmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{pmatrix} \vec{d_r} \\ \vec{d_s} \\ \vec{RS} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \vec{d_r} &= (1,-1,2) \\ \vec{d_s} &= (1+a, -a, 3a) \\ \vec{RS} &= (1,2,3) - (2,0,1) = (-1,2,2) \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando Sarrus:

$$A^* = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1+a & -a & 3a \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2a + 4(1+a) + 3a - 2a + 2(1+a) - 6a =$$
$$= -a + 6 = 0 \rightarrow a = 6$$

Por tanto, para que r y s se corten $a=6$.

b) Para qe ambas rectas sean perpendiculares, sus vectores directores poseen un producto escalar nulo. Portanto:

$$\vec{d_r} = (1,-1,2)$$
$$\vec{d_s} = (1+a,-a,3a)$$

$$\vec{d_r} \cdot \vec{d_s} = 0 \rightarrow (1,-1,2)\cdot(1+a,-a,3a) = 1+a+a+6a = 1+8a = 0$$

$$a = -1/8$$

Por tanto, para qe r y s sean perpendiculares $a = -1/8$.