OPCIÓN A

1. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *hallar la matriz X dada por* $A\,X\,A^{!1} = B$ [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

$A\,X\,A^{-1} = B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}\,B\,A$

Calculemos A^{-1}: $\quad |\,A\,| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}\left(A^t\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\left(A^t\right)}{|\,A\,|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $$X = A^{-1}\,B\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}}$$

2. *Hallar, en función del parámetro positivo a, la posición relativa de la circunferencia de ecuación* $(x-2)^2 + y^2 = a$ *y la recta de ecuación* $y = x$. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = a \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + x^2 = a \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 4x + 4 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8(4-a)}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{8a - 16}}{4}$$

X Si $a = 2$: la recta es tangente a la circunferencia pues sólo se cortan en un punto.

X Si $a > 2$: la recta es secante a la circunferencia pues se cortan en dos puntos.

X Si $a < 2$: la recta es exterior a la circunferencia pues no tienen puntos comunes.

3. *Hallar el punto de la recta* $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ *más próximo al punto A (0, !1, 1)* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Puesto que el punto A es un punto de la recta, el punto de la recta más próximo a A es el propio A.

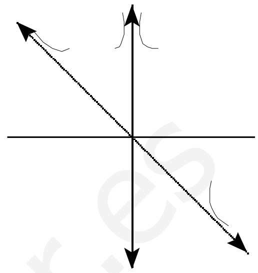
4. *Dada la función* $f(x) = -x + \dfrac{4}{x^2}$*, se pide:*

a) Asíntotas de la curva y = f(x) [1 punto]
b) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento [1 punto]
c) Dibujar la gráfica [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) X Asíntotas verticales: $x = 0$ pues $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x + \dfrac{4}{x^2}\right) = \infty$.

Posición de la curva respecto a la asíntota:



$$\lim_{x\to 0^-}\left(-x + \frac{4}{x^2}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\left(-x + \frac{4}{x^2}\right) = +\infty$$

X Asíntota oblicua: es la recta $y = -x$

Posición de la curva respecto a la asíntota: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4}{x^2} = 0^+$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4}{x^2} = 0^+$

b) $f'(x) = -1 - \dfrac{8x}{x^4} = -1 - \dfrac{8}{x^3} = 0 \;\Rightarrow\; -\dfrac{8}{x^3} = 1 \;\Rightarrow\; x^3 = -8 \;\Rightarrow\; x = -2$ (punto crítico)

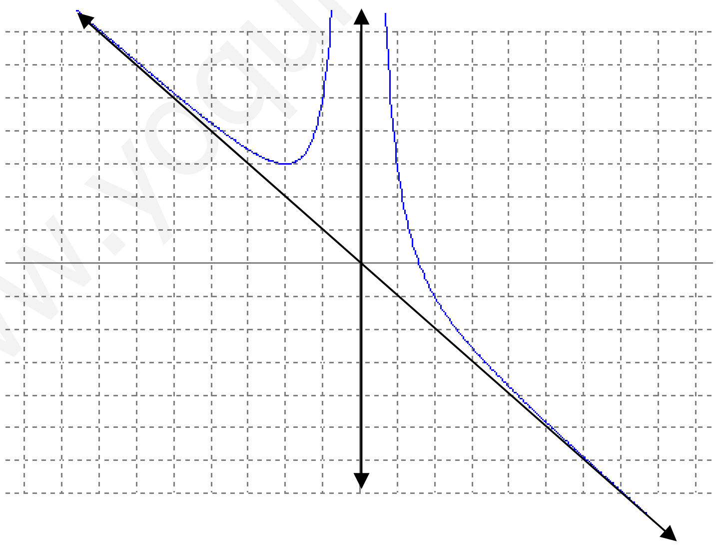
$f''(x) = \dfrac{24x^2}{x^6} = \dfrac{24}{x^4} \;\Rightarrow\; f''(-2) > 0 \;\Rightarrow\; x = -2$ es un mínimo relativo: $(-2\,,3)$

X Intervalos de crecimiento y decrecimiento: los valores de x donde $f'(x)$ puede cambiar de signo son $x = -2$ y $x = 0$:

f' < 0	f' > 0	f' < 0
	! 2	0

La función es decreciente en: $(-\infty\,,-2)\cup(0\,,+\infty)$
La función es creciente en: $(-2\,,0)$

c)



5. *La derivada segunda de una función f es f''(x) = 6 (x – 1). Hallar la función si su gráfica pasa por el punto (2 , 1) y en este punto es tangente a la recta 3x – y – 5 = 0.* [2 puntos]

SOLUCIÓN.

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 6(x-1)\,dx = 6\left(\frac{x^2}{2} - x + C\right) = 3x^2 - 6x + C$$

Como la gráfica es tangente a la recta $y = 3x - 5$ en el punto $(2\,,1)$: $f'(2) = 3 \;\Rightarrow\; \cancel{12} - \cancel{12} + C = 3 \;\Rightarrow\; C = 3$ luego $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(3x^2 - 6x + 3\right) dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 3x + K = x^3 - 3x^2 + 3x + K$$

y como la gráfica pasa por el punto $(2\,,1)$: $8 - 12 + 6 + K = 1 \;\Rightarrow\; K = -1$

Por tanto: $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

OPCIÓN B

1. *Hallar el rango de la matriz* $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ *según sea el valor del parámetro a* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,B \geq 2$

Se observa que la cuarta columna es combinación lineal de la primera, por lo que no debemos tenerla en cuenta para el estudio del rango. Orlemos el menor anterior con los elementos de la segunda y tercera columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \cancel{a} + a^2 - \cancel{a} - \cancel{1} - a + \cancel{1} = a^2 - a = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

X Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$: $\text{rg}\,B = 3$

X Para $a = 0$ o $a = 1$: $\text{rg}\,B = 2$

2. *Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de los cuadrados de las distancias de P a A (0, 0) y a B (2, 0) es 4. ¿Qué figura representa esta ecuación?* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sea $P(x\,,y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Se tiene:

$$\left[d(P\,,A)\right]^2 + \left[d(P\,,B)\right]^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \;\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\; 2x^2 + 2y^2 - 4x = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x^2 + y^2 - 2x = 0}$ que es una circunferencia

3. *Hallar el punto del eje OY que es coplanario con los puntos P (1 , 1 , 1) , Q (2 , 2 , 1) y R (1 , 2 , 0).* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Un punto del eje OY es $Y(0, y, 0)$. Para que sea coplanario con los puntos P, Q y R, los vectores $\overrightarrow{PY} = (-1, y-1, -1)$, $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{PR} = (0, 1, -1)$ deben ser linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & y-1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \cancel{1} - \cancel{1} + y - 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{Y(0, 1, 0)}$$

4. *Hallar a y b para que la función f dada por* $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ *sea continua y derivable para todo x real* [1,5 puntos]. *Encontrar los puntos en donde la recta tangente a la curva y = f(x) es paralela al eje OX* [1 punto].

SOLUCIÓN.

X La función es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ por ser funciones polinómicas las definidas en dichos intervalos.
La función tiene que ser continua en $x = 1$ y para ello debe ser:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to 1} x^2 = \lim_{x\to 1} \left(-x^2 + ax + b\right) \;\Leftrightarrow\; 1 = -1 + a + b \;\Leftrightarrow\; a + b = 2 \qquad (*)$$

X $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 1 \\ -2x + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

La función es derivable $(\exists f'(x))$ $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. También tiene que ser derivable en $x = 1$ y para ello debe ser: $f'(1^-) = f'(1^+) \;\Leftrightarrow\; 2 = -2 + a \;\Rightarrow\; \boxed{a = 4}$

Sustituimos el valor de a en la igualdad (*) y obtenemos: $\boxed{b = -2}$

X $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

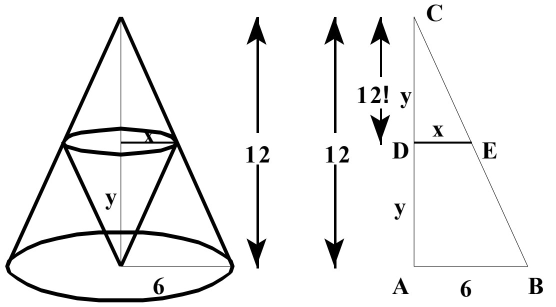
Los puntos de tangente horizontal son aquellos en los que $f'(x) = 0$:

Para $x \in (-\infty, 1)$: $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{(0, 0)}$

Para $x \in (1, +\infty)$: $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \;\Rightarrow\; \boxed{(2, 2)}$

5. *Un cono circular recto tiene una altura de 12 cm y radio de la base de 6 cm. Se inscribe un cono de vértice el centro de la base del cono dado y base paralela a la del cono dado. Hallar las dimensiones (altura y radio de la base) del cono de volumen máximo que puede inscribirse así* [2 puntos].

SOLUCIÓN.



El volumen del cono inscrito es: $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$

Encontremos una relación entre las variables x e y:

Los triángulos ABC y DEC son semejantes, luego

$$\frac{x}{6} = \frac{12-y}{12} \iff 12x = 72 - 6y \iff y = 12 - 2x$$

El volumen del cono inscrito viene dado entonces por la función: $V = \frac{1}{3}\pi x^2 \left(12 - 2x\right) = 4\pi x^2 - \frac{2}{3}\pi x^3$.

Estudiemos para qué valor de x el volumen es máximo:

$$V' = 8\pi x - 2\pi x^2 = 0 \Rightarrow 2\pi x\left(4 - x\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \;,\; x = 4 \quad \text{(valores críticos)}$$

$$V'' = 8\pi - 4\pi x \Rightarrow \left| \begin{array}{l} V''(0) = 8\pi > 0 \Rightarrow \text{volumen mínimo} \\ V''(4) = 8\pi - 16\pi < 0 \Rightarrow \text{volumen máximo} \end{array} \right.$$

Por tanto, el volumen es máximo para $x = 4$, $y = 4$ es decir 4 cm de altura y 4 cm de radio de la base.