

Junio 2000.

OPCIÓN A

1. Hallar, si existe, una matriz cuadrada 2×2 , A , que cumpla las siguientes condiciones:

1) Coincide con su traspuesta.

2) Verifica la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

3) Su determinante vale 9.

[2,5 puntos]

SOLUCIÓN

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$X \quad A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$X \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{12} + a_{22} \\ -a_{11} - a_{12} & -a_{12} - a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & -a_{11} - a_{12} + a_{12} + a_{22} \\ -a_{11} - a_{12} & a_{11} + a_{12} - a_{12} - a_{22} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{12} = -3 \\ -a_{11} + a_{22} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = -a_{11} - 3 \\ a_{22} = a_{11} - 3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{11} - 3 \\ -a_{11} - 3 & a_{11} - 3 \end{pmatrix}$$

$$X \quad \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{11} - 3 \\ -a_{11} - 3 & a_{11} - 3 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow a_{11}^2 - 3a_{11} - a_{11}^2 - 3a_{11} - 9 = 9 \Rightarrow -9a_{11} = 18 \Rightarrow a_{11} = -2$$

Por tanto, la matriz A es: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

2. Hallar los valores de las constantes a , b y c para que las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad y \quad g(x) = x^3 + c$$

pasen por el punto $(1, 2)$ y en este punto tengan la misma tangente. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Por pertenecer el punto $(1, 2)$ a ambas funciones: $f(1) = 2$; $g(1) = 2$ y por tener en dicho punto la misma tangente: $f'(1) = g'(1)$.

$$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b = 1 \quad ; \quad g(1) = 2 \Rightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(1) = 2 + a$$

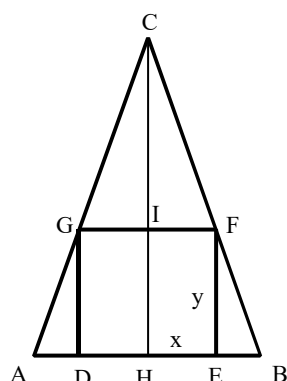
$$\Rightarrow f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2 + a = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 0$$

$$g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g'(1) = 3$$

Por tanto, las funciones son: $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^3 + 1$

3. Un triángulo isósceles tiene 10 cm de base (que es el lado desigual) y 20 cm de altura. Se inscribe en este triángulo un rectángulo uno de cuyos lados se apoya en la base del triángulo. Hallar las dimensiones del rectángulo así construido y que tenga la mayor área posible. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Sea x la mitad de la base e y la altura del rectángulo. La función que debe ser máxima es $A = 2xy$.

Como la función depende en principio de dos variables, busquemos una relación entre ellas. Los triángulos CHB y FEB son semejantes por lo que puede establecerse la siguiente proporción:

$$\frac{CH}{EF} = \frac{HB}{EB} \Leftrightarrow \frac{20}{y} = \frac{5}{5-x} \Rightarrow y = \frac{20 \cdot (5-x)}{5} = 4 \cdot (5-x) = 20-4x$$

La función que debe ser máxima es: $A = 2x(20-4x) = 40x - 8x^2$. Veamos para qué valor alcanza su máximo:

$$A' = 40 - 16x = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{16} = \frac{5}{2} \quad \text{y como } A'' = -16 < 0 \Rightarrow \text{la función alcanza}$$

un máximo para $x = \frac{5}{2}$. Para este valor de x : $y = 20 - 4 \cdot \frac{5}{2} = 20 - 10 = 10$

Las dimensiones del rectángulo son: base = 5 cm, altura = 10 cm.

4. Dada la recta r de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases}$ y los puntos $P(1, 1, 2)$ y $Q(1, -1, 2)$, se pide:

1) Encontrar la posición relativa de r y la recta determinada por P y Q [1,5 puntos]

2) Hallar el punto o puntos R de r para los que el triángulo PQR es isósceles de lados iguales PR y QR [1 punto].

SOLUCIÓN.

1) Un vector direccional de la recta r es $\vec{u} = (2, 1, 0)$ y un punto de la misma el $A(-1, -1, 1)$. En la recta que pasa por P y Q , un vector direccional es $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (0, -2, 0)$ y uno de sus puntos el $P(1, 1, 2)$, por ejemplo.

Veamos si los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\overrightarrow{AP} = (2, 2, 1)$ son o no linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{los vectores son linealmente independientes} \Rightarrow \text{las rectas se cruzan.}$$

2) Un punto cualquiera de r es: $R(-1 + 2\alpha, -1 + \alpha, 1)$.

$$d(P, R) = d(Q, R) \Rightarrow \sqrt{(1 + 1 - 2\alpha)^2 + (1 + 1 - \alpha)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{(1 + 1 - 2\alpha)^2 + (-1 + 1 - \alpha)^2 + (2 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$4 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 + \alpha^2 - 4\alpha + 1 = 4 + 4\alpha^2 - 8\alpha + \alpha^2 + 1 \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow R(1, 0, 1)$$

Junio 2000

OPCIÓN B

1. Discutir el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}$$
 según los valores del parámetro a [1 punto].

Resolverlo en todos los casos de compatibilidad [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

Sean A y B las matrices de los coeficientes y ampliada, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & a & a \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = a-1-(a-1)^2 = a-1-a^2+2a-1 = -a^2+3a-2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 1, a = 2$$

X Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$: $\text{rg } A = \text{rg } B = n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

Para resolverlo aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ a & a-1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)(a-2)} = \frac{a-a-(a-1)^2}{(a-1)(a-2)} = \frac{-(a-1)^2}{(a-1)(a-2)} = -\frac{a-1}{a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{(a-1)(a-2)} = \frac{a-1-a \cdot (a-1)}{(a-1)(a-2)} = \frac{a-1-a^2+a}{(a-1)(a-2)} = \frac{-a^2+2a-1}{(a-1)(a-2)} = -\frac{(a-1)^2}{(a-1)(a-2)} = -\frac{a-1}{a-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)(a-2)} = \frac{a-1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2}$$

X Si $a = 1$: $\text{rg } A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Orlando el menor anterior con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-1=0 \Rightarrow \text{rg } B = 2$.

Por tanto: $\text{rg } A = \text{rg } B = 2 < n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Resolución: las dos ecuaciones independientes son la primera y la segunda y utilizando z como parámetro:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 - k, y = 0, z = k$$

X Si $a = 2$: $\text{rg } A = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } B = 3$. Por tanto, el sistema es incompatible para $a = 2$.

2. Se considera la función: $f(x) = \frac{|x-1|}{x}$

- 1) Estudiar su continuidad y derivabilidad cuando $x = 1$. [1 punto]
- 2) ¿Alcanza para dicho valor de x un máximo o mínimo relativo? Razonar la respuesta. [1 punto]
- 3) Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, se pregunta si el extremo en cuestión es absoluto. [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$$|x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{y, por tanto:} \quad f(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1) **Continuidad:**

$$X \exists f(1) = 0$$

$$X \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x): \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{luego } \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$X \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{y, por tanto, la función es continua en } x = 1.$$

Derivabilidad: la función derivada de $f(x)$ es $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ y como $f'(1^-) = -1$ y $f'(1^+) = 1$

$\Rightarrow$ la función no es derivable en $x = 1$ pues sus derivadas laterales son distintas

2) Puesto que $f'(1^-) < 0$, la función es decreciente a la izquierda de 1. Como $f'(1^+) > 0$, la función es creciente a la derecha de 1. Por tanto, en $x = 1$ la función alcanza el menor valor de entre los puntos próximos $\Rightarrow$ es un mínimo.

3) No es un mínimo absoluto puesto que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la función y a la izquierda de 0 la función decrece indefinidamente.

3. Haciendo el cambio de variable $u = e^x$ calcular $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$\text{Se tiene: } \int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = \int \frac{du}{u^2 - 1} = (1)$$

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1} = \frac{Au - A + Bu + B}{(u+1)(u-1)} = \frac{(A+B)u - A + B}{u^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$$

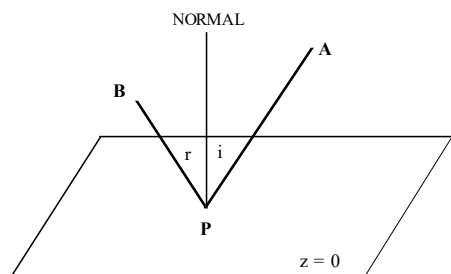
$$(1) = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u+1} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u-1} = -\frac{1}{2} \ln(u+1) + \frac{1}{2} \ln(u-1) = \ln \sqrt{\frac{u-1}{u+1}} = \ln \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} + C$$

4. Suponer que el plano coordenado $z = 0$ es un espejo (reflectante en ambas caras). Desde el punto $A (3, 2, 4)$ se emite un rayo de luz, que reflejándose en este espejo, ilumina el punto $B (0, 1, 2)$.

1) ¿En qué punto del espejo debe incidir el citado rayo? [1,5 puntos]

2) Hallar la ecuación general del plano que contiene a los rayos incidente y reflejado. [1 punto]

SOLUCIÓN.



Como P está en el plano $z = 0$, sus coordenadas son: $P(x, y, 0)$ y el vector $\overrightarrow{AP} = (x-3, y-2, -4)$ y el $\overrightarrow{BP} = (x, y+1, -2)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

Debe suceder: $\hat{i} = \hat{r} \Rightarrow \cos \hat{i} = \cos \hat{r}$
 $\cong \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}$ y $\vec{n}$ están en un mismo plano.

$\cong$ De la primera condición:

$$\cos \hat{i} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-4}{\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + 16} \cdot \sqrt{1}} = \frac{-4}{\sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 29}}$$

$$\cos \hat{r} = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BP}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-2}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2 + 4}} = \frac{-2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 5}}$$

Igualando:

$$-4\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 5} = -2\sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 29} \Rightarrow 16(x^2 + y^2 + 2y + 5) = 4(x^2 + y^2 - 6x - 4y + 29) \Rightarrow$$

$$4x^2 + 4y^2 + 8y + 20 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 29 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0 \quad (*)$$

$\cong$ De la segunda condición, si los tres vectores están en un mismo plano son linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & -4 \\ x & y+1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-3)(y+1) - x(y-2) = 0 \Rightarrow xy + x - 3y - 3 - xy + 2x = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0 \quad (**)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (*) y (**):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 + 2x + 4x - 4 - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 1, x = -3 \Rightarrow y = 0, y = -4$$

Nos salen dos soluciones: $P_1(1, 0, 0)$ y $P_2(-3, -4, 0)$

2) La ecuación del plano ya ha sido obtenida en (**): $x - y - 1 = 0$