

Septiembre 2003

OPCIÓN A

1. Discutir el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y - az = 2 \\ -x + y - z = a - 1 \end{cases}$$
 según los valores del parámetro a [1,5 puntos]. Entre los valores de a que hacen el sistema compatible elegir uno en particular y resolver el sistema que resulte al reemplazar a por el valor elegido [1 punto].

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A , y ampliada, M , son:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -a & 2 \\ -1 & 1 & -1 & a-1 \end{array} \right)$$

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de ambas matrices es 2 como mínimo.

Veamos para qué valores de a el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -a \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2a + a - 1 - 2 + 1 + a^2 = a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

X Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$: $\text{rg } A = \text{rg } M = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

X Para $a = -1$: $\text{rg } A = 2$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 2 + 2 + 2 + 2 = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 3$ y como los rangos de ambas matrices son distintos, el sistema es incompatible.

X Para $a = 2$: $\text{rg } A = 2$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2 = \text{rg } A < \text{n}^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

< Para la segunda parte del ejercicio (resolución) puede optarse por dar al parámetro un valor distinto de -1 y 2 y resolverlo sabiendo que es compatible determinado, o bien resolverlo para $a = 2$ sabiendo que es compatible indeterminado. Nosotros lo resolveremos en ambos casos y en el primero optaremos por resolverlo sin sustituir a .

X Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$: resolvemos el sistema por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -a \\ a-1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - a - 2} = \frac{-2 - a^2 + a - 2 + 2a - 2 + 2 + a}{(a+1) \cdot (a-2)} = \frac{-a^2 + 4a - 4}{(a+1) \cdot (a-2)} = \frac{-(a-2)^2}{(a+1) \cdot (a-2)} = -\frac{a-2}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -a \\ -1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - a - 2} = \frac{-2a - a + 1 + a - 2 + 1 + a^3 - a^2}{(a+1) \cdot (a-2)} = \frac{a^3 - a^2 - 2a}{(a+1) \cdot (a-2)} = \frac{a \cdot (a+1) \cdot (a-2)}{(a+1) \cdot (a-2)} = a$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}}{(a+1) \cdot (a-2)} = \frac{2a^2 - 2a + 1 - 2 + 2 - a + 1 - 2a}{(a+1) \cdot (a-2)} = \frac{2a^2 - 5a + 2}{(a+1) \cdot (a-2)} = \frac{2 \cdot \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot (a-2)}{(a+1) \cdot (a-2)} = \frac{2a-1}{a+1}$$

X Para $a = 2$: puesto que el menor distinto de 0 en la matriz de los coeficientes es $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, las ecuaciones segunda y tercera son independientes en las incógnitas x e y . Considerando la incógnita z como parámetro ($z = \lambda$), el sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x + 2y = 2 + 2\lambda \\ -x + y = 1 + \lambda \end{cases}$$
. Sumando ambas ecuaciones: $3y = 3 + 3\lambda \Rightarrow y = 1 + \lambda$ y sustituyendo en la primera ecuación: $x = 2 + 2\lambda - 2 - 2\lambda = 0$, es decir las soluciones en este caso son: $x = 0$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$

2. Determinar el dominio [0,5 puntos], ceros [0,5 puntos] y extremos [1,5 puntos] de la función $f(x) = x \ln x$.

SOLUCIÓN.

X $D(f) = \mathbb{R}^+$ pues la función $y = x$ tiene por dominio $\mathbb{R}^+$ y la función $y = \ln x$ tiene por dominio $(0, +\infty)$.

X $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \ln x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$ luego la función se anula en $x = 0$ y en $x = 1$.

$$X \quad f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ y como $f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0 \Rightarrow$ en $x = \frac{1}{e}$ la función tiene un mínimo relativo

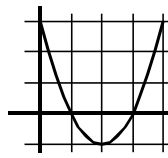
3. Sea la parábola $y = x^2 - 4x + 3$.

- Determinar los puntos de corte de la parábola con los dos ejes coordenados [0,5 puntos]
- Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de abscisas [1 punto]
- Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de ordenadas [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) X Con OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = 1 \Rightarrow (1, 0) \\ x = 3 \Rightarrow (3, 0) \end{cases}$

X Con OY: $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (0, 3)$



$$b) \quad A = \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \right| = \left| (9 - 18 + 9) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) \right| = \left| -\frac{1}{3} - 1 \right| = \frac{4}{3} \text{ u}^2$$

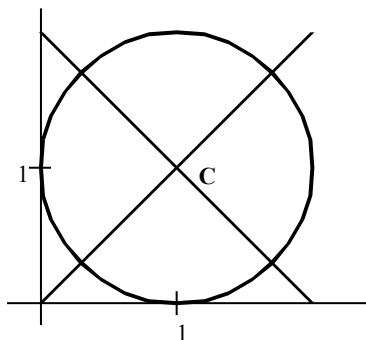
$$c) \quad A = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \text{ u}^2$$

4. Sea C una circunferencia cuyo centro es el punto $(1, 1)$ y que es tangente a los dos ejes coordenados.

a) Escribir su ecuación general [1 punto].

b) Determinar los puntos de C donde la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.



a) El centro es $C(1, 1)$ y el radio es $r = 1$, con lo que su ecuación es:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

b) Los puntos serán los de intersección de la circunferencia con la recta perpendicular a $y = x$ que pasa por C :

pendiente de $y = x$: $m = 1 \Rightarrow$ pendiente de la perpendicular: $m' = -1$

La recta es: $y = -x + n$ y como pasa por $C(1, 1) \Rightarrow n = 2$ es decir $y = -x + 2$.

Cortando la recta y la circunferencia: $\begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (-x + 2)^2 - 2x - 2(-x + 2) + 1 = 0 \Rightarrow$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x + 2x - 4 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Septiembre 2003

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Vemos que ambas tienen rango máximo, o sea 2. Determinar los valores de c tales que la matriz $A + cB$ ya no tenga rango 2 [1,5 puntos]. ¿Cuál es el rango que tienen las respectivas matrices suma? [1 punto]

SOLUCIÓN.

$$A + cB = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}. \quad \text{Para que el rango no sea 2, el único menor de orden 2 debe ser 0:}$$

$$\begin{vmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2-c+2c-c^2+4+4c=0 \Leftrightarrow -c^2+5c+6=0 \Rightarrow c = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-2} = \frac{-5 \pm 7}{-2} =$$

$$= -1, 6.$$

Por tanto, para $c = -1$ o $c = 6$: $\text{rg}(A + cB) = 1$. Para $c \neq -1$ y $c \neq 6$: $\text{rg}(A + cB) = 2$

2. Sea la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ y sea T la recta tangente a su gráfica en $x = \pi$. Determinar:

a) La ecuación de T [1,5 puntos]

b) El área encerrada entre T y los ejes coordenados [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $f(\pi) = 0 \Rightarrow$ El punto de tangencia es: $(\pi, 0)$.

La pendiente de la recta tangente es $f'(\pi)$ y como $f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x \Rightarrow m = f'(\pi) = -\pi$

Por tanto, la ecuación de T es: $y - 0 = -\pi \cdot (x - \pi) \Leftrightarrow y = -\pi x + \pi^2$

b) Se trata de un triángulo de base: $\begin{cases} y = 0 \\ y = -\pi x + \pi^2 \end{cases} \Rightarrow \pi x = \pi^2 \Rightarrow x = \pi$

y altura: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\pi x + \pi^2 \end{cases} \Rightarrow y = \pi^2$

Y, por tanto, su área es: $A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \pi^2 = \frac{\pi^3}{2} \text{ u}^2$

3. Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

a) Definir su dominio [0,5 puntos]

b) Calcular su límite en el infinito [0,5 puntos]

c) Determinar sus extremos [0,5 puntos]

d) Calcular el área encerrada por la gráfica de f entre las abscisas 0 y 1 [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional en la que su denominador no se anula para ningún valor de x . Por tanto: $D(f) = \mathbb{R}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$

c) $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$ (puntos críticos)

$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2 + 1)^2 - (-x^2 + 1) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) > 0 \Rightarrow \text{en } x = -1 \text{ hay un mínimo relativo} \\ f''(1) < 0 \Rightarrow \text{en } x = 1 \text{ hay un máximo relativo} \end{cases}$

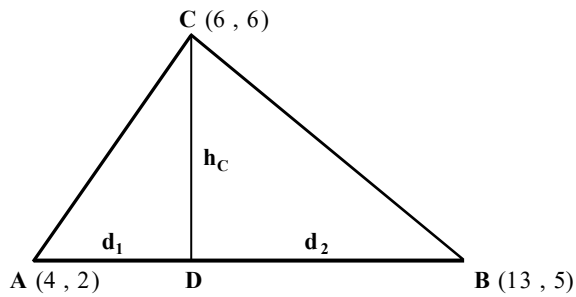
d) $A = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2} \text{ u}^2$

4. Sea el triángulo de vértices $A(4, 2)$, $B(13, 5)$ y $C(6, 6)$.

a) Hallar la ecuación de la altura que pasa por el vértice C [1,5 puntos]

b) Calcular la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado AB [1 punto]

SOLUCIÓN.



a) La altura es la recta perpendicular a AB que pasa por C :

$$AB = (9, 3) \Rightarrow m = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow m' = -3$$

y su ecuación es: $y - 6 = -3 \cdot (x - 6) \Leftrightarrow y = -3x + 24$

b) Calculemos las coordenadas de D como intersección del lado AB y la altura h_C :

$$\text{X Ecuación de } AB: y - 2 = \frac{1}{3} \cdot (x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

X	Coordenadas	de	D:
$\begin{cases} y = -3x + 24 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow -3x + 24 = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow -9x + 72 = x + 2 \Rightarrow 10x = 70 \Rightarrow x = 7, y = 3$			

$$\text{X Por tanto: } d_1 = \sqrt{(7-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10} \quad , \quad d_2 = \sqrt{(13-7)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$