

Junio 2005.

OPCIÓN A

1. Eva, Marta y Susana son tres jóvenes amigas que se comprometen a leer el Quijote este verano. Cada una por separado y en función del tiempo del que dispone, decide leer un mismo número de páginas cada día hasta terminar la obra. Eva leerá diariamente 5 páginas más que Marta y ésta 6 páginas más que Susana. Por ello Eva terminará la obra dos semanas antes que Marta y ésta 30 días antes que Susana. Se pregunta cuál es el total de páginas que tiene la versión de la inmortal obra cervantina que leen estas amigas. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sea x el total de páginas de la obra e y el número de páginas diarias que lee Eva. El número de páginas diarias que lee Marta es $y - 5$ y el de Susana es $y - 11$.

$\frac{x}{y}$ es el número de días que tarda Eva en leer la obra completa, $\frac{x}{y-5}$ son los días que tarda Marta y $\frac{x}{y-11}$ los que tarda Susana. Se tiene:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{x}{y-5} - 14 \\ \frac{x}{y} = \frac{x}{y-11} - 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-5) = xy - 14y(y-5) \\ x(y-11) = xy - 44y(y-11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 5x = xy - 14y^2 + 70y \\ xy - 11x = xy - 44y^2 + 484y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 14y^2 - 70y \\ 11x = 44y^2 - 484y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{14y^2 - 70y}{5} = \frac{44y^2 - 484y}{11} \Rightarrow 154y^2 - 770y = 220y^2 - 484y \Rightarrow 66y^2 - 1650y = 0 \Rightarrow y(66y - 1650) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0, y = \frac{1650}{66} = 25 \quad \text{la solución } y = 0 \text{ se desecha por absurda y nos queda } y = 25, \text{ y por tanto: } x = 1400$$

Es decir, la versión elegida de *el Quijote* tiene 1400 páginas.

2. Sea la función $f(x) = \frac{4x + \sin 2x}{\sin 3x}$. Determinar el dominio de f [1 punto] e indicar si f tiene límite finito en algún punto que no sea del dominio. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X El dominio es $D(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / \sin 3x = 0\}$. $\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = 0 + K\pi \Rightarrow x = K \cdot \frac{\pi}{3}$ y por tanto:

$$D(f) = \mathbb{R} - \frac{K\pi}{3} \quad \text{con } K = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{X Para } K = 0 \Rightarrow x = 0: \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + \sin 2x}{\sin 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + 2 \cos 2x}{3 \cos 3x} = 2$$

Para los restantes valores de K , el denominador se anula y el numerador no, por lo que la función tiende a infinito.

3. Calcular los extremos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Se tiene: $f'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) \Rightarrow f''(x) = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) = 2e^x \cos x$

X Los extremos relativos anulan la primera derivada: $e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow \Rightarrow \operatorname{tag} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}$.

Comprobemos si se trata de máximos o mínimos:

$$f'''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2e^{\frac{3\pi}{4}} \cos \frac{3\pi}{4} < 0 \Rightarrow \text{se trata de un punto de máximo relativo.}$$

$$f'''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2e^{\frac{7\pi}{4}} \cos \frac{7\pi}{4} > 0 \Rightarrow \text{se trata de un punto de mínimo relativo}$$

X Los puntos de inflexión anulan la segunda derivada: $2e^x \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

Comprobemos que no anulan la tercera derivada: $f'''(x) = 2[e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x] = 2e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) \Rightarrow$

$$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\frac{\pi}{2}} (0 - 1) \neq 0 \Rightarrow \text{la función tiene un punto de inflexión en } x = \frac{\pi}{2}$$

$$f'''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2e^{\frac{3\pi}{2}} (0 + 1) \neq 0 \Rightarrow \text{la función tiene un punto de inflexión en } x = \frac{3\pi}{2}$$

4. Escribir la ecuación de la circunferencia con centro $(2, -1)$ y cuyo radio es 3, y luego determinar los puntos de esta circunferencia que equidistan de los ejes. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Nota: Las cónicas no forman parte de los contenidos para este examen. Este problema ha sido propuesto por error.

La ecuación de la circunferencia es: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

Los puntos que equidistan de los ejes están en las rectas $y = x$ o $y = -x$. Por tanto:

X Cortes con $y = x$: $x^2 + x^2 - 4x + 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$
luego los puntos son: $(-1, -1)$ y $(2, 2)$.

X Cortes con $y = -x$: $x^2 + x^2 - 4x - 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

luego los puntos son: $\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}\right)$ y $\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\right)$

Junio 2005.

OPCIÓN B

1. La terna $(0, 0, 0)$ es siempre solución del sistema
$$\begin{cases} x + 2y - az = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 2ax + y - z = 0 \end{cases}$$
 independientemente del valor del parámetro a .

- a) Indicar para qué valores del parámetro la citada terna es la única solución del sistema. [1,5 puntos]
b) Indicar algún valor del parámetro, si existe, para el cual el sistema tenga algunas soluciones distintas de la nula y mostrar estas soluciones. (Nota: si se encuentran varios valores del parámetro cumpliendo la condición pedida, para responder a esta cuestión basta tomar uno solo de ellos). [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes.

El sistema tiene una solución única (la solución trivial) cuando $\text{rg } A = 3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 + 4a - 2a^2 + 2a - 1 = -3a^2 + 6a = 0 \Rightarrow 3a(-a + 2) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 2 \text{ es decir, cuando}$$

$a \neq 0$ y $a \neq 2$ el rango de A es 3 y por tanto el sistema tiene como única solución $x = y = z = 0$

b) Para que el sistema tenga otras soluciones (compatible indeterminado) debe ser $\text{rg } A < 3$ y esto ocurre cuando $a = 0$ y $a = 2$:

$$\begin{aligned} \text{X Para } a = 0: \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 & x = -2\lambda \\ y = \lambda & y = \lambda \\ z = \lambda & z = \lambda \end{cases} \\ \text{X Para } a = 2: \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 & x = 0 \\ -y + z = 0 & y = \lambda \\ & z = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

2. Queremos construir un marco rectangular que encierre una superficie de un metro cuadrado. Sabemos que el coste de cada centímetro en los lados horizontales es de 2 euros, mientras que en los lados verticales es de 8 euros. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo más barato posible. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Se tiene: $x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

La función que debe ser mínima es la función "Precio":

$$P = 2x \cdot 200 + 2y \cdot 800 = 400x + 1600y \Leftrightarrow P = 400x + \frac{1600}{x}$$

$$P' = 400 - \frac{1600}{x^2} = 0 \Rightarrow 400x^2 - 1600 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ (valor crítico)}$$

Comprobemos que el valor crítico obtenido minimiza la función:

$P'' = \frac{3200x}{x^4} \Rightarrow P''(2) > 0 \Rightarrow x = 2$ minimiza la función "Precio". Por tanto, las dimensiones del marco más barato es de 2 metros de ancho y 0,5 metros de alto.

3. Sea la función $f(x) = x \cdot \sin 2x$. Calcular la integral de esta función entre $x = 0$ y su primer cero positivo. (Nota: Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula). [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Obtenemos los ceros de la función: $x \cdot \sin 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$\int x \cdot \sin 2x \cdot dx = (1) \left\{ u = x \Rightarrow du = dx ; dv = \sin 2x \cdot dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \right\} (1) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \cdot dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin 2x \cdot dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

4. Sea el plano $\pi : 2x - 3y + z = 1$ y el punto $A = (5, -5, 4)$.

a) Determinar el punto simétrico de A respecto de π . [1,5 puntos]

b) Volumen de la figura del espacio limitada por el plano π y los tres planos cartesianos. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) X Obtenemos la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por A:

El vector $\vec{u} = (2, -3, 1)$ es normal al plano y, por tanto, es un vector direccional de la recta. Las ecuaciones

paramétricas de la recta son: $r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -5 - 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$

X Obtenemos ahora las coordenadas del punto M, intersección de π y r :

$$2 \cdot (5 + 2t) - 3 \cdot (-5 - 3t) + 4 + t = 1 \Rightarrow 10 + 4t + 15 + 9t + 4 + t = 1 \Rightarrow 14t = -28 \Rightarrow t = -2$$

luego el punto M es el de coordenadas: $M(1, 1, 2)$

X El punto M es el punto medio del segmento AA' donde A' es el punto simétrico de A respecto a π :

$$1 = \frac{5+x}{2} \Rightarrow x = -3 ; 1 = \frac{-5+y}{2} \Rightarrow y = 7 ; 2 = \frac{4+z}{2} \Rightarrow z = 0 \text{ es decir, el punto simétrico de A es } (-3, 7, 0).$$

b) El tetraedro tiene por vértices el origen de coordenadas O y los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados:

con OX: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow X\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \Rightarrow \overline{OX} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$

con OY: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow Y\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right) \Rightarrow \overline{OY} = \left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$

$$\text{con OZ: } \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow Z(0, 0, 1) \Rightarrow \overline{\text{OZ}} = (0, 0, 1)$$

$$\text{Por tanto: } V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{36} u^3$$