

Junio 2006.

OPCIÓN A

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es un número real.

a) Encontrar los valores de λ para los que la matriz AB tiene inversa. [1,5 puntos]

b) Dados a y b números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ compatible determinado con A la matriz del enunciado? [1 punto]

SOLUCIÓN.

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B \text{ tiene inversa cuando } |A \cdot B| \neq 0: \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1+2\lambda-3-2\lambda+3\lambda+2\lambda^2 = 2\lambda^2+3\lambda-2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}, \lambda = -2. \text{ Luego la matriz } A \cdot B \text{ tiene inversa para } \lambda \neq \frac{1}{2} \text{ y } -2$$

b) No puede serlo. La matriz A tiene un rango máximo de 2 y el número de incógnitas es de 3.

2. Calcular los valores de a y b para que la función $f(x) = \frac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x=2$ y como asíntota horizontal la recta $y=3$. Razonar si para $a=2$ y $b=3$ la función $f(x)$ tiene algún mínimo relativo.

[2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X Para que $x=2$ sea una asíntota vertical de la función, debe ser $a=2$ pues $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{bx}{x-a} = \infty$

Para que $y=3$ sea una asíntota horizontal debe ser $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ y eso ocurre cuando $b=3$ pues $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-2} = 3$

X $f(x) = \frac{3x}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x-2)-3x}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2} \neq 0 \forall x \Rightarrow$ La función no tiene extremos relativos.

3. a) Utilizando el cambio de variable $t = e^x$, calcular $\int e^{x+e^x} dx$ [1,5 puntos]

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{7x^2}$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Se tiene: $\int e^{x+e^x} dx = \int e^x \cdot e^{e^x} dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{e^x} + C$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{7x^2} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{14x} = \frac{1}{0} = \infty$

4. Calcular la distancia entre las rectas r y s , donde $r: \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 3 + k \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -1 + 3k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$

SOLUCIÓN.

Estudiemos la posición relativa de las dos rectas:

$\vec{u} = (2, -1, 1)$ es un vector direccional de r y $\vec{v} = (1, 3, -2)$ un vector direccional de $s \Rightarrow$ las rectas no son paralelas puesto que sus coordenadas no son proporcionales.

$A(2, 1, 3)$ es un punto de r y $B(-1, -1, 4)$ un punto de $s \Rightarrow \vec{AB} = (-3, -2, 1)$

Veamos si los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{AB}$ son o no linealmente independientes:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 6 + 9 + 1 - 8 = 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes $\Rightarrow$ las rectas están en un

mismo plano y, por tanto, se cortan $\Rightarrow d(r, s) = 0$

Junio 2006

OPCIÓN B

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{pmatrix}$

- a) Sin utilizar la regla de Sarrus, calcular el determinante de dicha matriz. [1,5 puntos]
b) Estudiar el rango de A en el caso en que $b = -a$. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a)

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} a \begin{vmatrix} a & ab & ab \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} a^2 \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} a^2 \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} a^2 \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} \stackrel{(5)}{=} \\ = a^2 \cdot (a^2 - b^2)^2$$

Propiedades aplicadas: (1) y (2) sacar factor común a "a" en la primera columna y en la primera fila. (3) $F_2 - b \cdot F_1$, $F_3 - b \cdot F_1$
(4) y (5) Desarrollo por los elementos de la primera columna

- b) Para $b = -a$, la matriz A es: $\begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$ y como los tres vectores fila son linealmente dependientes, el rango de la matriz es 1.

2. La función $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$ es continua en $[0, \infty)$.

- a) Hallar el valor de a que hace que esta afirmación es cierta. [0,75 puntos]
b) Calcular $\int_0^{10} f(x) dx$ [1,75 puntos]

SOLUCIÓN.

- a) El único punto de posible discontinuidad está en $x = 8$. Para que la función sea continua en él debe ser:

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} \sqrt{ax} = \sqrt{8a} \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{x^2 - 32}{x - 4} = 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{8a} = 8 \Rightarrow 8a = 64 \Rightarrow a = 8$$

- b) Puesto que hay un cambio de definición de la función en $x = 8$: $\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx$

Calculemos las primitivas:

$$\int \sqrt{8x} \, dx = \sqrt{8} \int x^{1/2} \, dx = \sqrt{8} \cdot \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{x^3}$$

$$\int \frac{x^2 - 32}{x - 4} \, dx = \int \left(x + 4 - \frac{16}{x - 4} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 + 4x - 16 \ln(x - 4)$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{10} f(x) \, dx &= \int_0^8 \sqrt{8x} \, dx + \int_8^{10} \frac{x^2 - 32}{x - 4} \, dx = \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^8 + \left[\frac{1}{2} x^2 + 4x - 16 \ln(x - 4) \right]_8^{10} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot 16\sqrt{2} + 50 + 40 - 16 \ln 6 - 32 - 32 + 16 \ln 4 = \frac{128}{3} + 26 + 16 \ln \frac{4}{6} = \frac{206}{3} + \ln \left(\frac{2}{3} \right)^{16} \end{aligned}$$

3. Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sean x y $8 - x$ los dos sumandos. La función que debe ser mínima es: $f(x) = x^3 + (8 - x)^2 = x^3 + x^2 - 16x + 64$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-2 \pm 14}{6} \Rightarrow x = 2, \quad x = -\frac{8}{3}$$

$$f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f''(2) > 0 \Rightarrow \text{para } x = 2 \text{ la función es mínima.}$$

Los dos sumandos son: 2 y 6

4. a) Estudiar si son linealmente independientes los vectores $\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ y $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Expresar el vector $\vec{v} = (0, 0, 1)$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. [1,5 puntos]

b) ¿Son el plano $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-3} = -z$ ortogonales?. Justificar la respuesta.

[1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 2 - 3 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes.

$$(0, 0, 1) = \alpha_1(3, 1, 2) + \alpha_2(0, 1, 1) + \alpha_3(1, 1, 1) = (3\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

y resolviendo el sistema: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -3$ es decir: $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$

b) El plano y la recta serán perpendiculares si el vector normal al plano $\vec{n}$ y el vector direccional de la recta $\vec{u}$ son paralelos (tienen sus coordenadas proporcionales):

Se tiene: $\vec{n} = (2, 3, 1)$ y $\vec{u} = (-2, -3, -1)$ y como $\vec{n} = -\vec{u}$, son paralelos y, por tanto, el plano y la recta son perpendiculares.