Junio 2007.

OPCIÓN A

1. *Considerar el sistema lineal de ecuaciones en* x, y *y* z: $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ mx+2z=0 \\ my-z=m \end{cases}$

a) Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene solución única. Calcular dicha solución para m = 1. [1 punto]
b) Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones. [1 punto]
c) Estudiar si existe algún valor de m para el cual el sistema no tiene solución. [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) El sistema es compatible determinado (tiene una solución única) cuando $rg\,A = rg\,M = 3$ siendo A la matriz de los coeficientes y M la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \end{array}\right)$$

Veamos para qué valores del parámetro el rango es máximo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = m^2+3m-2m = m^2+m = 0 \quad \Rightarrow \quad m(m+1)=0 \quad \Rightarrow \quad m=0 \ , \ m=-1$$

Por tanto, el sistema tiene una solución única para $m \neq 0$ y $m \neq -1$.

• Para m = 1, las soluciones las encontramos con la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6-10}{1+3-2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1+5-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

b) Para que el sistema sea compatible indeterminado (tenga infinitas soluciones) debe ser: $rg\,A = rg\,M < 3$ y esto sucederá para $m=0$ o $m=-1$.

Para m = 0: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\,A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

Orlemos el menor de orden 2 con los términos independientes para comprobar cuál es el rango de M:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad rg\,M = 2$$

Por lo tanto, para m = 0: $rg\,A = rg\,M = 2 < 3 \quad \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor que da rango a las matrices, utilizamos las dos primeras ecuaciones y las incógnitas "y" y "z" como incógnitas principales y "x" como secundaria. Consideremos $x=\lambda$ como un parámetro:

$$\left.\begin{array}{r} 3y+z=5-\lambda \\ 2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad z=0 \quad , \quad y=\frac{5-\lambda}{3} \qquad \text{luego las soluciones son:} \quad x=\lambda \quad , \quad y=\frac{5-\lambda}{3} \quad , \quad z=0$$

c) El sistema sólo puede ser incompatible (no tiene solución) para $m=-1$ y lo será si para dicho valor: $rg\,A \neq rg\,M$

Comprobemos cuáles son los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg\,A=2$.

Orlando este menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5-3=2\neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg\,M=3$

Por tanto, para $m=-1$ el sistema es incompatible.

2. *Calcular:* *a)* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$ [1,25 puntos] *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$ [1,25 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2-5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5-4}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-5}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x=1^\infty=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{x\cdot(-x)\cdot\frac{1}{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\right]^{-\frac{1}{x}}=e^0=1$$

3. *Sea* $F(x)=\int_1^{x^2}\ln t\,dt$, con $x\geq 1$. *Calcular F'(e). ¿Es F''(x) una función constante? Justificar la respuesta.*

[2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

• Calculemos $\int \ln t\,dt$. Aplicamos el método de integración por partes: $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$

Sean: $\begin{array}{l} u=\ln t \;\Rightarrow\; du=\frac{1}{t}\cdot dt \\ dv=dt \;\Rightarrow\; v=t \end{array}$ $\Bigg|$ $\Rightarrow \int \ln t\cdot dt=t\cdot\ln t-\int t\cdot\frac{1}{t}\cdot dt=t\cdot\ln t-t=t\cdot(\ln t-1)$

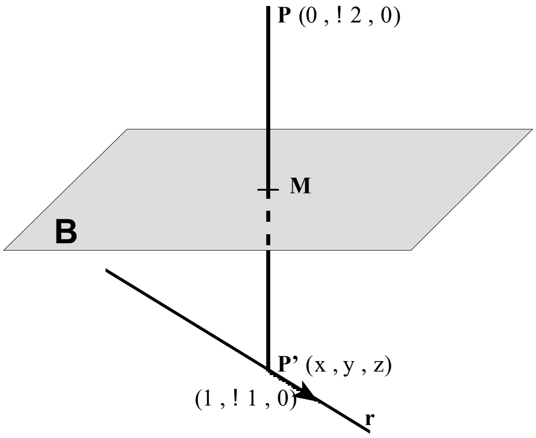
Por tanto: $F(x)=\int_1^{x^2}\ln t\cdot dt=\left[t\cdot(\ln t-1)\right]_1^{x^2}=\left[x^2\cdot\left(\ln x^2-1\right)\right]-\left[1\cdot(\ln 1-1)\right]=x^2\cdot(2\ln x-1)+1$

• $F'(x)=2x\cdot(2\ln x-1)+x^2\cdot\dfrac{2}{x}=2x\cdot(2\ln x-1)+2x=2x\cdot(2\ln x-1+1)=4x\cdot\ln x \quad\Rightarrow\quad F'(e)=4e$

• $F''(x)=4\cdot\ln x+4x\cdot\dfrac{1}{x}=4\cdot(\ln x+1) \quad\Rightarrow\quad F''(x)$ no es una función constante

4. *Escribir las ecuaciones implícitas de una recta con la dirección del vector* $(1,-1,0)$ *y que pasa por P' el simétrico de* $\mathrm{P}=(0,-2,0)$ *respecto al plano* $\pi: \mathrm{x}+3\mathrm{y}+\mathrm{z}=5$. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



• Calculemos el punto P' (simétrico de P respecto al plano B):

El vector $\vec{n}=(1,3,1)$ es normal al plano B.
Las ecuaciones paramétricas de la recta PP' (que pasa por P y tiene a $\vec{n}$ como vector direccional) son:

$$\left.\begin{array}{r} x=t \\ y=-2+3t \\ z=t \end{array}\right\}$$

El punto M, intersección de la recta y el plano, es:

$$t+3(-2+3t)+t=5 \;\Rightarrow\; t-6+9t+t=5 \;\Rightarrow\; 11t=11 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; t=1 \;\Rightarrow\; M\,(1,1,1)$$

Puesto que M es el punto medio del segmento PP':

$$1=\frac{0+x}{2} \;\Rightarrow\; x=2 \;;\; 1=\frac{-2+y}{2} \;\Rightarrow\; y=4 \;;\; 1=\frac{0+z}{2} \;\Rightarrow\; z=2 \text{ es decir el punto P' es: } P'(2,4,2)$$

• La ecuación continua de la recta que pasa por P' y tiene la dirección del vector $(1,-1,0)$ es: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-2}{0}$ y sus ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2=y-4 \\ 0=z-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=6 \\ z=2 \end{array}\right\}$$

OPCIÓN B

1. *Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros y un total almacenado de 2000 euros. Si el número total de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20, averiguar cuántos billetes de cada tipo hay.*

SOLUCIÓN.

Sea "x" el nº de billetes de 10 €, "y" el de billetes de 20 € y "z" el de 50 €. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=95 \\ 10x+20y+50z=2000 \\ x=2y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=95 \\ x+2y+5z=200 \\ x-2y=0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 95 & 1 & 1 \\ 200 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-400+950}{-2+5-2+10}=\frac{550}{11}=50 \;;\; \text{de la tercera ecuación: } y=\frac{x}{2}=\frac{50}{2}=25 \;;\; z=95-50-25=20$$

Por tanto, hay 50 billetes de 10 €, 25 billetes de de 20 € y 20 billetes de 50 €.

2. *Sea la función* $f: /\longrightarrow /$ *definida por* $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x+1}$.

a) Calcular su dominio. [0,5 puntos]
b) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. [1 punto]
c) Analizar sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y determinar las que existan. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Por tratarse de una función racional: $D(f) = ¡ - \{x / x+1=0\} = ¡ - \{-1\}$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{2\,(x+2)\,(x+1)-(x+2)^2}{(x+1)^2}=\frac{(x+2)\left[2\,(x+1)-(x+2)\right]}{(x+1)^2}=\frac{(x+2)\,x}{(x+1)^2}$$

f' > 0		f' < 0		f' > 0
	! 2		0	

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty\,,-2)\cup(0\,,\infty)$ y decreciente en $(-2\,,0)$.

c) • Asíntotas verticales: $x=-1$ pues $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$.

Posición relativa de la curva respecto a la asíntota:

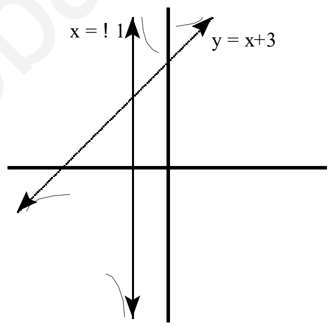
$$\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+2)^2}{x+1}=-\infty \qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{(x+2)^2}{x+1}=+\infty$$

• Asíntotas horizontales u oblicuas:

$$\frac{(x+2)^2}{x+1}=\frac{x^2+4x+4}{x+1}=x+3+\frac{1}{x+1} \Rightarrow y=x+3 \text{ es una asíntota oblicua.}$$

Posición relativa de la curva respecto a la asíntota:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x+1}=0^- \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x+1}=0^+$$



3. *Calcular* $\int_{1/e}^{e}\left|\ln x\right|\,dx.$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

La función $\left|\ln x\right|=\begin{cases}-\ln x & \text{si } 0<x<1\\ \ln x & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

$$\int_{1/e}^{e}\left|\ln x\right|dx=\int_{1/e}^{1}(-\ln x)\,dx+\int_{1}^{e}\ln x\,dx=-\int_{1/e}^{1}\ln x\,dx+\int_{1}^{e}\ln x\,dx=(1)$$

• Calculemos $\int \ln x\,dx$ por el método de integración por partes: $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$.

Sean $\left|\begin{array}{l} u=\ln x \;\Rightarrow\; du=\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv=dx \;\Rightarrow\; v=x\end{array}\right| \Rightarrow \int \ln x\cdot dx = x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=x\cdot\ln x-x=x\,(\ln x-1)$

Se tiene entonces: $(1)=-\left[x(\ln x-1)\right]_{1/e}^{1}+\left[x(\ln x-1)\right]_{1}^{e}=-\left[1\cdot(0-1)-\frac{1}{e}\cdot(-1-1)\right]+\left[e\cdot(1-1)-1\cdot(0-1)\right]=$

$$=-\left[-1+\frac{2}{e}\right]+1=1-\frac{2}{e}+1=2-\frac{2}{e}=\frac{2e-2}{e}=\frac{2\,(e-1)}{e}\;;\; 1,26$$

4. *a) Las componentes de* $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ *en una cierta base de* V_3 *son:* $\vec{u}=(2\,,0\,-1)$, $\vec{v}=(-3\,,1\,,2)$, $\vec{w}=(4\,,-2\,,7)$. *Hallar, en esa misma base, las componentes del vector* $2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}$. [0,75 puntos]

b) Determinar la posición relativa de las siguientes rectas: $r_1:\begin{cases}7x+5y-7z-12=0\\2x+3z+11=0\end{cases}$ $\quad r_2:\begin{cases}5x-5y-z-16=0\\3x-2y-7=0\end{cases}$

[1,75 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}=2\cdot(2\,,0\,,-1)-(-3\,,1\,,2)+\frac{1}{3}\cdot(4\,,-2\,,7)=(4\,,0\,,-2)+(3\,,-1\,,-2)+\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{25}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$

b) • Obtengamos dos puntos de r_1:

$$\left.\begin{array}{r}7x+5y=12+7z\\2x=11-3z\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}z=1:\quad x=4\quad y=-\frac{9}{5}\;\Rightarrow\;A\left(4\,,-\frac{9}{5},1\right)\\z=3:\quad x=1\quad y=\frac{26}{5}\;\Rightarrow\;B\left(1\,,\frac{26}{5}\,,3\right)\end{array}\Rightarrow\;\vec{AB}=(-3\,,7\,,2)$$

• Obtengamos dos puntos de r_2:

$$\left.\begin{array}{r}5x-z=16+5y\\3x=7+2y\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}y=1:\quad x=3\quad z=-6\;\Rightarrow\;P(3\,,1\,,-6)\\y=-2:\quad x=1\quad z=-1\;\Rightarrow\;Q(1\,,-2\,,-1)\end{array}\Rightarrow\;\vec{PQ}=(-2\,,-3\,,5)$$

Puesto que las coordenadas de $\vec{AB}$ y $\vec{PQ}$ no son proporcionales, los vectores no tienen la misma dirección $\Rightarrow$ las dos rectas se cortan o se cruzan.

• Consideremos ahora un vector de origen un punto de r_1 y extremo un punto de r_2: $\vec{AP}=\left(-1\,,\frac{14}{5}\,,-7\right)$.

Estudiemos el rango del conjunto de vectores $\vec{AB}$, $\vec{PQ}$ y $\vec{AP}$:

$$\begin{vmatrix}-3 & 7 & 2\\-2 & -3 & 5\\-1 & \frac{14}{5} & -7\end{vmatrix}=-63-35-\frac{56}{5}-6-98+42\neq 0\;\Rightarrow\;\text{las rectas } r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan.}$$