

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las dos opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

- A1. a) Estudiar para qué valores de a el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$ es no nulo. Para $a = 3$, obtener el determinante de la matriz $2A$. (1,5 puntos)

- b) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular el rango de $(AB)^T$. (1 punto)

SOLUCIÓN.

- a) Veamos para qué valores de a el determinante es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2(a-1) + 2a^2(a-1) = a^2(a-1) = 0 \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} \text{ luego } |A| \neq 0 \quad \forall a \neq 0 \text{ y } 1.$$

$$\text{Para } a = 3: |2A| \stackrel{(1)}{=} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot |A| = 8 \cdot 9 \cdot 2 = 144$$

(1) Si multiplicamos por un número todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada, su determinante queda multiplicado por ese número. Al calcular la matriz $2A$, los elementos de las tres líneas (filas o columnas) se multiplican por 2. De ahí que el determinante quede multiplicado tres veces por 2.

- b) $rg(A \cdot B)^T = rg(A \cdot B)$ pues la traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por las columnas y el rango de filas y de columnas de una matriz es el mismo.

$$\text{Calculemos } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix} \text{ y obtengamos su rango:}$$

$$\text{El único menor de orden tres es: } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 6 + 18 = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$$

$$\text{y como el menor } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0 \Rightarrow rg(AB)^T = rg(AB) = 2$$

A2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & -\infty < x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(ax) & 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \pi \leq x < +\infty \end{cases}$

- a) Calcular los valores de a para los cuales $f(x)$ es una función continua. (1 punto)
b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para cada uno de esos valores. (1 punto)
c) Obtener $\int_{-1}^0 f(x) dx$. (0,5 puntos)

SOLUCIÓN.

a) Para que $f(x)$ sea continua $\forall x$ debe serlo en $x=0$ y en $x=\pi$.

Para que lo sea en $x=0$ debe ser: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} [\sin(ax)] \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ la función es continua en $x=0 \quad \forall a$ porque además $f(0) = 0$.

Para que lo sea en $x=\pi$ debe ser: $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} [\sin(ax)] = \lim_{x \rightarrow \pi} [(x-\pi)^2 + 1] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin(\pi a) = 1 \Rightarrow \pi a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow a = \frac{1}{2} + 2k \quad k = 0, 1, 2, \dots$

b) Para los valores de a encontrados, la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & -\infty < x \leq 0 \\ \sin\left(\frac{x}{2} + 2kx\right) & 0 < x < \pi \\ (x-\pi)^2 + 1 & \pi \leq x < +\infty \end{cases}$ y la función derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ \cos\left(\frac{x}{2} + 2kx\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 2k\right) & \text{si } 0 < x < \pi \\ 2(x-\pi) & \text{si } \pi \leq x < +\infty \end{cases}$$

Derivabilidad en $x=0$: $\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 2 \\ f'(0^+) = \frac{1}{2} + 2k \end{array} \right| \Rightarrow 2 \neq \frac{1}{2} + 2k \text{ para } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x=0.$

Derivabilidad en $x=\pi$: $\left. \begin{array}{l} f'(\pi^-) = 0 \\ f'(\pi^+) = 0 \end{array} \right| \Rightarrow f(x) \text{ es derivable en } x=\pi$

c) $\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_{-1}^0 = 0 - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = -\frac{2}{3}$

A3. Encontrar el polinomio de grado dos $p(x) = ax^2 + bx + c$ sabiendo que satisface: en $x=0$ el polinomio vale 2, su primera derivada vale 4 para $x=1$ y su segunda derivada vale 2 en $x=0$.

Estudiar si el polinomio obtenido es una función par. ¿Tiene en $x=0$ un punto de inflexión? (2,5 puntos)

SOLUCIÓN.

C $p(0) = 2 \Rightarrow c = 2$

$$p'(x) = 2ax + b \Rightarrow p''(x) = 2a \Rightarrow \left| \begin{array}{l} p''(0) = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ p'(1) = 4 \Rightarrow 2 + b = 4 \Rightarrow b = 2 \end{array} \right.$$

Por tanto: $p(x) = x^2 + 2x + 2$

C $p(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 2 = x^2 - 2x + 2 \neq p(x) \Rightarrow$ no es una función par

C No, pues $p''(x) = 2 \quad \forall x \Rightarrow$ no tiene puntos de inflexión (por otra parte, se trata de una parábola que no los tiene)

A4. Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$ y $s \equiv x-1=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$

- a) Justificar si son o no perpendiculares. (1 punto)
b) Calcular la distancia del punto $P(16, 0, 0)$ a la recta r . (1,5 puntos)

SOLUCIÓN.

- a) Obtenemos un vector direccional de cada una de las rectas:

De r : dos puntos de la recta son, por ejemplo $A(3, 2, 1)$ y $B(7, 0, 2) \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4, -2, 1)$

De s : $\vec{v} = (1, 3, 2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - 6 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow r \perp s$$

$$\begin{aligned} \text{b) } d(P, r) &= \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 13 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{16+4+1}} = \frac{|-2\vec{i} - 4\vec{j} - 26\vec{k} + 8\vec{k} - 13\vec{j} - 2\vec{i}|}{\sqrt{21}} = \frac{|(-4, -17, -18)|}{\sqrt{21}} = \\ &= \frac{\sqrt{16+289+324}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{629}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{629}{21}} \approx 5,47 \text{ u} \end{aligned}$$

OPCIÓN B

- B1. a) Estudiar para qué valores de x , la matriz inversa de $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincide con su opuesta. (1,5 puntos)

b) Dos hermanos de tercero y cuarto de primaria iban camino del colegio con sus mochilas cargadas de libros todos del mismo peso. Uno de ellos se lamentaba del peso que transportaba y el otro le dijo: “¿De qué te quejas? Si yo te cogiera un libro, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio si te diera un libro, tu carga igualaría a la mía”

¿Cuántos libros llevaba cada hermano? (1 punto)

SOLUCIÓN.

- a) Sea $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ la matriz dada. Su opuesta es: $-A = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$.

Calculemos su matriz inversa. El determinante de la matriz es: $|A| = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 10$

$$A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } A)} \begin{pmatrix} -x & -5 \\ 2 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } A)^T} \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{(\text{Adj } A)^T}{|A|}} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-x}{-x^2+10} & \frac{2}{-x^2+10} \\ \frac{-5}{-x^2+10} & \frac{x}{-x^2+10} \end{pmatrix}$$

$$\text{Para que } A^{-1} = -A \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-x}{-x^2+10} & \frac{2}{-x^2+10} \\ \frac{-5}{-x^2+10} & \frac{x}{-x^2+10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} \Rightarrow -x^2 + 10 = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

- b) Sea x el número de libros que lleva el primero de ellos e y los que lleva el segundo. Se tiene:

$$\begin{cases} x+1=2(y-1) \\ x-1=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y=3 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow y=5 ; x=7$$

luego el primero lleva 7 libros y el segundo 5.

B2. Sea $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3}$

- a) Calcular el dominio de $f(x)$. (0,5 puntos)
- b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (1 punto)
- c) Analizar las asíntotas de $f(x)$ y calcular las que existan. (1 punto)

SOLUCIÓN.

a) Por tratarse de una función racional:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x^3 = 0\} = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x^2(1-x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

b) El crecimiento y decrecimiento de una función depende del signo de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x-1)(x^2-x^3) - (2x^2-x)(2x-3x^2)}{(x^2-x^3)^2} = \frac{x^2[(4x-1)(1-x) - (2x-1)(2-3x)]}{x^4(1-x)^2} = \\ &= \frac{4x-4x^2-1+x-4x+6x^2+2-3x}{x^2(1-x)^2} = \frac{2x^2-2x+1}{x^2(1-x)^2} \end{aligned}$$

El denominador es positivo $\forall x$. Estudiemos el signo del numerador: $2x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{4}$.

Observamos que el numerador no cambia de signo y que $2x^2 - 2x + 1 > 0$

Por tanto, la función es creciente.

c) C Asíntotas verticales: pueden serlo $x=0$ y $x=1$.

$$x=0: \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x-1)}{x^2(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x(1-x)} = \infty \Rightarrow x=0 \text{ es una asíntota vertical de la función.}$$

Estudiemos la posición de la gráfica respecto a la asíntota:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x-1}{x(1-x)} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-1}{x(1-x)} = -\infty$$

$$x=1: \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \infty \Rightarrow x=1 \text{ es una asíntota vertical de la función}$$

Estudiemos la posición relativa de la gráfica respecto a la asíntota:

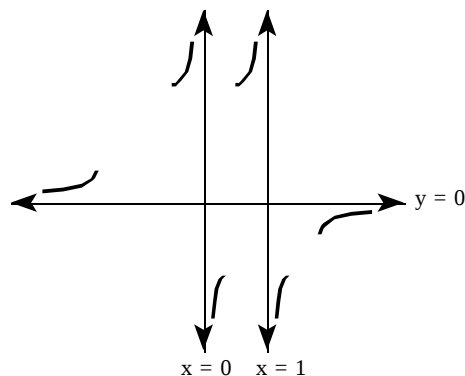
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = -\infty$$

C Asíntotas horizontales u oblicuas:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = 0 + \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} \Rightarrow y=0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = 0^+ ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = 0^-$$



B3. a) Hallar el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$. (1,25 puntos)

b) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \ln n}{\ln(7n^2)} \right)^{\ln n}$. (1,25 puntos)

SOLUCIÓN.

a) Construimos la función diferencia de ambas funciones $f(x) = x^3 - 4x$ y calculamos el área limitada por esta función y el eje OX:

$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2, x = 2$ (puntos de corte de $f(x)$ y el eje de abscisas). Se tiene:

$$S = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 \right| = |0 - 4 + 8| + |4 - 8 - 0| = 8 \text{ u}^2$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \ln n}{\ln(7n^2)} \right)^{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \ln n}{\ln 7 + 2 \ln n} \right)^{\ln n} = 1^\infty = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \ln n}{\ln 7 + 2 \ln n} - 1 \right) \cdot \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \ln n - \ln 7 - 2 \ln n}{\ln 7 + 2 \ln n} \right) \cdot \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-\ln 7 \cdot \ln n}{\ln 7 + 2 \ln n} \right)} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-\ln 7 \cdot \ln n}{2 \ln n} \right)} = e^{\frac{-\ln 7}{2}} = e^{-\ln \sqrt{7}} = \frac{1}{e^{\ln \sqrt{7}}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7} \end{aligned}$$

B4. a) Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(3, -2, 2)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y - z = 0$. (1,75 puntos)

b) Estudiar si los vectores $\vec{a} = (1, -1, -1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

(0,75 puntos)

SOLUCIÓN.

a) El plano está definido por el punto $(1, 1, 1)$ y los vectores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1, -1)$ normal al plano π :

$$\text{La ecuación del plano es: } \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 - 2z + 2 + 2y - 2 + 6z - 6 + 2y - 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 3 = 0$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{los vectores son linealmente independientes.}$$