

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las dos opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A1.

- a) (1,25 puntos) Estudiar para qué valores de α el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango máximo.
- b) (1,25 puntos) Siendo A^{-1} la inversa de la matriz A , calcular $(A^{-1})^2$ para $\alpha = -1$.

SOLUCIÓN.

a) $rg A = 3 \quad \forall \alpha$ tal que $|A| \neq 0$: $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{vmatrix} = 2(\alpha+1)^2 - (\alpha-2) - 2 - 2(\alpha+1) =$
 $= 2\alpha^2 + 4\alpha + 2 - \alpha + 2 - 2 - 2\alpha - 2 = 2\alpha^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha(2\alpha+1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \alpha = -\frac{1}{2}$

Por lo tanto, el rango de A es máximo para $\forall \alpha \neq -\frac{1}{2}$ y 0 .

b) Para $\alpha = -1$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y además sabemos que $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Calculemos A^{-1} :

- Calculemos la matriz adjunta de A : $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ luego: $(Adj A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- La matriz traspuesta de la adjunta: $(Adj A)^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- El determinante de A es: $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$

- Luego la matriz inversa es: $A^{-1} = \frac{(Adj A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculemos ahora $(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A2.

a) (1,75 puntos) Utilizar el cambio de variable $t^6 = 1+x$ para calcular $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{2/3}-\sqrt{x+1}} dx$

b) (0,75 puntos) Para $f(x) = e^{-3x}$ calcular sus derivadas sucesivas y concluir cuál de las siguientes opciones es la correcta:

i) $f^{(n)}(x) = 3^n e^{-3x}$

ii) $f^{(n)}(x) = (-3)^{(n+1)} e^{-3x}$

iii) $f^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$

SOLUCIÓN.

a) $t^6 = 1+x \Rightarrow 6t^5 dt = dx$

Se tiene entonces:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{2/3}-\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t^3+2}{t^4-t^3} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^3+2}{t^3(t-1)} \cdot t^5 dt = 6 \int \frac{t^3+2}{t-1} \cdot t^2 dt = 6 \int \frac{t^5+2t^2}{t-1} dt$$

Dividiendo t^5+2t^2 entre $t-1$: $\frac{t^5+2t^2}{t-1} = t^4+t^3+t^2+3t+3+\frac{3}{t-1}$ y por consiguiente:

$$6 \int \frac{t^5+2t^2}{t-1} dt = 6 \left[\int \left(t^4+t^3+t^2+3t+3+\frac{3}{t-1} \right) dt \right] = 6 \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 3t + 3 \ln|t-1| \right) + k =$$

$$= \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 + 9t^2 + 18t + 18 \ln|t-1| + k \quad \text{y deshaciendo el cambio de variable:}$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{2/3}-\sqrt{x+1}} dx = \frac{6}{5}(x+1)^{5/6} + \frac{3}{2}(x+1)^{2/3} + 2(x+1)^{1/2} + 9(x+1)^{1/3} + 18(x+1)^{1/6} + 18 \ln|(x+1)^{1/6}-1| + k$$

b) $f(x) = e^{-3x} \Rightarrow f'(x) = -3e^{-3x} \Rightarrow f''(x) = (-3)^2 e^{-3x} \Rightarrow f'''(x) = (-3)^3 e^{-3x}$

Por lo tanto, la expresión de la derivada n-ésima es la iii): $f^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$

A3. Sea la función $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$

a) (0,5 puntos) Calcular su dominio.

b) (1 punto) Obtener sus asíntotas.

c) (1 punto) Estudiar sus puntos de corte con los ejes y analizar si es función par.

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional cuyo dominio es: $D(f) = \mathbb{R} - \{x / x-2=0\} = \mathbb{R} - \{2\}$

b) - Asíntotas verticales: $x=2$ pues $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2}{x-2} = \infty$. Además: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+2}{x-2} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+2}{x-2} = +\infty$

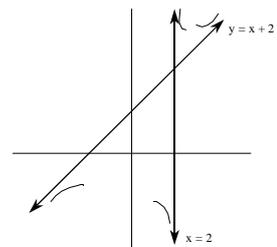
- Asíntotas oblicuas: $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2} = x+2 + \frac{6}{x-2} \Rightarrow y = x+2$ es una asíntota oblicua de la función.

Además: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x-2} = 0^-$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x-2} = 0^+$

c) - Puntos de corte con OX: No tiene pues $x^2+2 \neq 0 \quad \forall x$

- Puntos de corte con OY: $x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0, -1)$

- $f(-x) = \frac{(-x)^2+2}{-x-2} = \frac{x^2+2}{-x-2} \neq f(x) \Rightarrow$ la función no es par.



A4.

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2}, \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

y que pasa por el punto $A(1, 1, 2)$

b) (1 punto) Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 1)$. Obtener su producto vectorial.

SOLUCIÓN.

a) Por ser paralelas al plano, los vectores \vec{u} y \vec{v} direccionales de las rectas están contenidos en el plano. Como además conocemos un punto del mismo, disponemos de los elementos necesarios para escribir la ecuación del plano.

$$r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \vec{u} = (-1, 1, 2)$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{n}_1 = (2, -1, 1) \\ \vec{n}_2 = (-1, 1, 3) \end{matrix} \Rightarrow \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} - \vec{k} - 6\vec{j} - \vec{i} = (-4, -7, 1)$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-1-8y+8+7z-14+4z-8+y-1+14x-14=0 \Leftrightarrow 15x-7y+11z-30=0$$

-Otra forma-

Una vez obtenidos los vectores \vec{u} y \vec{v} direccionales de las rectas, el vector

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 8\vec{j} + 7\vec{k} + 4\vec{k} + \vec{j} + 14\vec{i} = (15, -7, 11) \text{ es un vector normal al plano.}$$

La ecuación del plano es: $15x - 7y + 11z + D = 0$ y haciendo que contenga al punto A:

$$15 - 7 + 22 + D = 0 \Rightarrow D = -30 \Rightarrow 15x - 7y + 11z - 30 = 0 \text{ es la ecuación del plano.}$$

b) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-2 + 1 + 1}{\sqrt{6} \sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} + \vec{k} - 2\vec{j} - \vec{i} = (0, -3, 3)$$

OPCIÓN B

B1.

a) (1 punto) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Estudiar qué valores de α y β

hacen que sea cierta la igualdad: $(\det(A))^2 - 2\det(A)\det(B) + 1 = 0$

b) (1,5 puntos) Utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor de

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN.

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ $\det(B) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} = \beta \cos^2 \alpha + \beta \sin^2 \alpha = \beta$

$$(\det(A))^2 - 2\det(A)\det(B) + 1 = 0 \Rightarrow 1 - 2\beta + 1 = 0 \Rightarrow 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$$

Por lo tanto, la igualdad se cumple para todo valor de α y para $\beta = 1$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a+3 & b+4 \\ 1 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2(ad - bc)$ (1): $F_2 - F_1, F_3 - F_1$

B2.

a) (1,25 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \ln x & 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x < +\infty \end{cases}$. Si $f(2) = 3$, obtener los valores de a y b que hacen que $f(x)$ sea continua.

b) (1,25 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x^2 - 9)$ y $\lim_{x \rightarrow 3^+} \log(x^2 - 9)$

SOLUCIÓN.

a) $- f(2) = 3 \Rightarrow 4a + b = 3$ (*)

$- f(x)$ debe ser continua en $x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \ln 1 = a + b \Rightarrow a + b = 0$ (**)

De las igualdades (*): $\begin{cases} 4a + b = 3 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 3 \\ -a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1, b = -1$

b) $-$ Puesto que la función $f(x) = x^2 - 9$ tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x^2 - 9) = +\infty$

$-$ Cuando $x \rightarrow 3^+$, $f(x) = x^2 - 9$ tiende a 0^+ y por tanto: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \log(x^2 - 9) = -\infty$

B3. Sea $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

a) (0,5 puntos) Determinar su dominio

b) (1 punto) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

c) (1 punto) Analizar sus puntos de inflexión

SOLUCIÓN.

a) Por tratarse de una función racional: $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ x / (x-1)^2 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(3x^3 - 3x^2 - 2x^3)}{(x-1)^4} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

Tenemos: $\frac{f' > 0}{0} \quad \frac{f' > 0}{1} \quad \frac{f' < 0}{3} \quad \frac{f' > 0}{}$ Creciente: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
 Decreciente: $(1, 3)$

c) Los puntos de inflexión deben verificar $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{(x-1)^2(3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2)}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (posible punto de inflexión)}$$

Como además: $f'''(x) = \frac{6(x-1)^4 - 6x \cdot 4(x-1)^3}{(x-1)^8} \Rightarrow f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$ En $x = 0$ hay un punto de inflexión: $(0, 0)$

B4.

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -2, 4)$, $B(0, 3, 2)$ y es paralelo a la recta $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$

b) (1 punto) En caso de que sea posible, escribir el vector $\vec{v} = (1, 2, 4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, $\vec{c} = (0, 1, 1)$

SOLUCIÓN.

a) Necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes contenidos en el plano. El punto puede ser el $A(1, -2, 4)$ y los vectores: $\vec{AB} = (-1, 5, -2)$ y el direccional de la recta $\vec{u} = (4, 1, 2)$ que son linealmente independientes. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-4 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 10x - 10 - 8y - 16 - z + 4 - 20z + 80 + 2y + 4 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 12x - 6y - 21z + 60 = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y - 7z + 20 = 0$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linealmente independientes \Rightarrow constituyen una base del espacio vectorial y

cualquier vector puede ser escrito como combinación lineal de los mismos.

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} \Leftrightarrow (1, 2, 4) = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(0, 1, 1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+4-2}{1+1} = \frac{3}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2+1-4}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$\lambda_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4+2-1}{2} = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto: $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$