

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A1. Sean a un número real y el sistema lineal
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Calcule el determinante de la matriz de los coeficientes y determine para qué valores de a el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado.

b) (1 punto) Resuelva el sistema anterior en el caso $a = 0$

SOLUCIÓN.

a) Sea A la matriz de los coeficientes y B la matriz ampliada. $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 0 & -3 & 2 \\ \hline 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ \hline \end{array} \quad a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a+2) = 0 \Rightarrow a = 1, a = -2$$

• Para $a \neq 1$ y $a \neq -2$: $\text{rg } A = \text{rg } B = 3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado

• Para $a = 1$: las matrices de los coeficientes y ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$ tienen ambas rango 1. El sistema es compatible indeterminado.

• Para $a = -2$: la matriz de los coeficientes tiene rango 2 pues el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ y la matriz ampliada tiene

rango 3 pues el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 2 + 1 + 2 - 4 - 4 \neq 0$. El sistema es incompatible.

b) El sistema es compatible determinado. Lo resolvemos por la regla de Cramer.

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \\ z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

A2. (2,5 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^2 + 11x}{x^3 - 2x^2 - 2x + 12} dx$

SOLUCIÓN.

Descomponemos la función racional en suma de fracciones simples:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & -2 & -2 & 12 \\ \hline -2 & & -2 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & 0 \\ \hline \end{array} \quad x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2} \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 12 = (x+2)(x^2 - 4x + 6)$$

$$\frac{x^2 + 11x}{x^3 - 2x^2 - 2x + 12} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2 - 4x + 6} = \frac{Ax^2 - 4Ax + 6A + Bx^2 + Cx + 2Bx + 2C}{(x+2)(x^2 - 4x + 6)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-4A+2B+C)x + (6A+2C)}{x^3 - 2x^2 - 2x + 12} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 & B=1-A & \Rightarrow B=2 \\ -4A+2B+C=11 & \Rightarrow -4A+2-2A-3A=11 & \Rightarrow A=-1 \\ 6A+2C=0 & C=-3A & \Rightarrow C=3 \end{cases}$$

Se tiene entonces: $\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12} dx = \int \frac{-1}{x+2} dx + \int \frac{2x+3}{x^2-4x+6} dx = (1)$

Calculemos cada una de las integrales:

$$\int \frac{-1}{x+2} dx = -\ln|x+2|$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+6} dx = \int \frac{2x-4+7}{x^2-4x+6} dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+6} dx + \int \frac{7}{x^2-4x+6} dx = \ln|x^2-4x+6| + 7 \int \frac{1}{x^2-4x+6} dx = (2)$$

$$\int \frac{1}{x^2-4x+6} dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+2} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{x-2}{\sqrt{2}}$$

Por tanto: $(2) = \ln|x^2-4x+6| + \frac{7\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{x-2}{\sqrt{2}} \Rightarrow (1) = -\ln|x+2| + \ln|x^2-4x+6| + \frac{7\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{x-2}{\sqrt{2}} + C$

Es decir: $\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12} dx = \ln \left| \frac{x^2-4x+6}{x+2} \right| + \frac{7\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{x-2}{\sqrt{2}} + C$

A3. a) (0,75 puntos) Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

b) (1 punto) Hallar el valor de k para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - \sin x} = 2$

c) (0,75 puntos) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, continua y derivable en la recta real. Supongamos que $f(0) \neq 0$ y $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo número real x, y. Demostrar que $f(0) = 1$; $f(x) \neq 0$; $f(x) > 0$ y $f'(x) = f'(0)f(x)$ para todo número real x.

SOLUCIÓN.

a) Sean $12-x$ y x los dos sumandos positivos. La función $f(x) = (12-x) \cdot x^2 = 12x^2 - x^3$ debe ser máxima.

$$f'(x) = 24x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(8-x) = 0 \Rightarrow x=0, x=8 \text{ (valores críticos)}$$

$$f''(x) = 24 - 6x: f''(0) = 24 > 0 \Rightarrow x=0 \text{ mínimo}; f''(8) = -24 < 0 \Rightarrow x=8 \text{ máximo}$$

Por tanto, los dos sumandos deben ser 4 y 8.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - \sin x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + k}{1 - \cos x} = \frac{2+k}{0} = (1)$

Para que el límite sea 2, k debe ser igual a -2 para que (1) sea una indeterminación $\frac{0}{0}$ (en caso contrario el límite es ∞). Comprobemos el valor del límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

c) • $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0) = [f(0)]^2 \Rightarrow f(0)[f(0)-1] = 0 \Rightarrow f(0) = 1$ pues $f(0) \neq 0$

• $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$

• $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)[f(h)-1]}{h} = (1)$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) \cdot f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0)[f(h)-1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} \text{ y sustituyendo en (1):}$$

$$(1) = f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} = f(x) \cdot f'(0) \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$

- A4. a) (1 punto)** Hallar el plano que contiene a la recta v de ecuación paramétrica $v: (2,1,3)+t(2,1,0)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x+z=2$
- b) (1,5 puntos)** Probar que los vectores $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y dar las coordenadas del vector $(1,-2,0)$ en la base anterior.

SOLUCIÓN.

- a)** Un plano queda determinado por un punto y dos vectores con distinta dirección. El plano que buscamos contiene a la recta v , luego contiene al punto $P(2,1,3)$ y al vector direccional $\vec{v}=(2,1,0)$. También contiene al vector normal al plano $x+z=2$, $\vec{n}=(1,0,1)$, que es perpendicular a él. Por tanto, el plano buscado es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-2-z+3-2y+2=0 \Leftrightarrow x-2y-z+3=0$$

- b)** Basta comprobar que los tres vectores son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{son linealmente independientes y forman una base de } \mathbb{R}^3.$$

$$(1,-2,0) = x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(1,0,0) = (x+y+z, x+y, x) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 & x=0 \\ x+y=-2 & y=-2 \\ x=0 & z=3 \end{cases}$$

OPCIÓN B

- B1. a) (1,5 puntos)** Comprueba que la matriz M es inversible y calcule su inversa, donde $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- b) (1 punto)** Encuentre las matrices A y B que cumplen las siguientes ecuaciones

$$8A - 5B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

- a)** M es inversible si $|M| \neq 0$: $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2+4+1-2=5 \neq 0 \Rightarrow M \text{ tiene inversa.}$

- Calculemos la matriz adjunta $(\text{Adj}M)$ y después la traspuesta de la adjunta $(\text{Adj}M)^t$:

$$a_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad a_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad a_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5; \quad a_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$a_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad a_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad a_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Luego } (\text{Adj}M) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{Adj}M)^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

• Por último: $M^{-1} = \frac{(\text{Adj } M)^t}{|M|} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & -1/5 \\ -1 & 3/5 & 1/5 \\ 1 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

b) Sean P y Q las matrices conocidas. Se tiene:

$$\begin{cases} 8A - 5B = P \\ 2A - B = Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8A + 5B = -P \\ 8A - 4B = 4Q \end{cases} \Rightarrow \text{Sumando: } B = 4Q - P \Rightarrow A = \frac{1}{2}(5Q - P) \text{ es decir:}$$

$$A = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 5 & -20 & 0 \\ 10 & -5 & 15 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -16 & 0 \\ 8 & -4 & 12 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 0 \\ 10 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

B2. a) (1,5 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida $\int \cos(\ln x) dx$

(Ayuda: realice un cambio de variable adecuado para esta integral)

b) (1 punto) Calcule el límite siguiente $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x^2}{x+3} \right) \ln \left(\frac{x+5}{x-1} \right) \right]$

SOLUCIÓN.

a) Realizamos el cambio de variable $\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \Rightarrow dx = x dt = e^t dt$

$$\int \cos(\ln x) dx = \int \cos t \cdot e^t \cdot dt = \left| \begin{array}{l} u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t dt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{array} \right| = e^t \cdot \cos t + \int e^t \cdot \sin t \cdot dt =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{array} \right| = e^t \cdot \cos t + e^t \cdot \sin t - \int e^t \cdot \cos t \cdot dt \Rightarrow 2I = e^t (\cos t + \sin t) \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} e^t (\cos t + \sin t) + K \Rightarrow \int \cos(\ln x) dx = \frac{1}{2} e^{\ln x} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + K = \frac{1}{2} x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + K$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x^2}{x+3} \right) \ln \left(\frac{x+5}{x-1} \right) \right] = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{x+5}{x-1} \right)^{\frac{x^2}{x+3}} \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+5}{x-1} \right)^{\frac{x^2}{x+3}} \right] = (1)$

$$\text{Calculemos } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+5}{x-1} \right)^{\frac{x^2}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6}{x-1} \right)^{\frac{x^2}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{6}} \right)^{\frac{\frac{x^2}{x+3} \cdot \frac{x-1}{6} \cdot \frac{6}{x-1}}{\frac{x-1}{6}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{6}} \right)^{\frac{x-1}{6}} \right]^{\frac{x^2}{x+3} \cdot \frac{6}{x-1}} = e^6$$

Por tanto: $(1) = \ln(e^6) = 6$

B3. Sea f la función de variable real definida mediante la expresión $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

a) (0,5 puntos) Determine el dominio de continuidad, simetrías, corte con los ejes y asíntotas de la función.

b) (1 punto) Calcule, si existen, los extremos relativos y absolutos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) (0,5 puntos) Calcule, si existen, los puntos de inflexión de f.

d) (0,5 puntos) Dibuje la gráfica de f.

SOLUCIÓN.

a) • $D(f) = \mathbb{R}$. La función es continua $\forall x$.

• $f(-x) = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -f(x) \Rightarrow$ la función es impar (simétrica respecto al origen de coordenadas)

• Corte con OX: $2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$. El origen de coordenadas también es el punto de corte con OY.

• La función no tiene asíntotas verticales pues no hay valores de x para los que la función tienda a infinito.

$y = 0$ es una asíntota horizontal de la función pues: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0^-$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0^+$.

$$\text{b) } f'(x) = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

$\begin{array}{ccccc} f' < 0 & & f' > 0 & & f' < 0 \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & -1 & & 1 & \end{array}$

Por tanto: la función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y creciente en $(-1, 1)$.

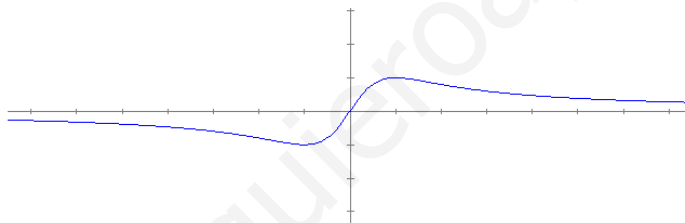
Como la función es continua, en $x = -1$, $(-1, -1)$, tiene un mínimo relativo y en $x = 1$, $(1, 1)$, un máximo relativo.

$$\begin{aligned} \text{c) } f''(x) &= \frac{-4x(x^2+1)^2 - 2(1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x(x^2+1)(x^2+1+2-2x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x(x^2+1)(-x^2+3)}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-4x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3} \quad (\text{posibles puntos de inflexión}) \\ f'''(x) &= \frac{(12x^2-12)(x^2+1)^3 + 4x(-x^2+3)3(x^2+1)^2 2x}{(x^2+1)^6} = \frac{(12x^2-12)(x^2+1) + 24x^2(-x^2+3)}{(x^2+1)^4} \end{aligned}$$

y como $f'''(0) \neq 0$, $f'''(-\sqrt{3}) \neq 0$, $f'''(\sqrt{3}) \neq 0$: $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ son puntos de inflexión:

$$(0, 0), \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (-1,73, -0,87), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (1,73, 0,87)$$

d)



B4. Sea el haz de planos de ecuación $(1+\lambda)x - y - \lambda z = 0$ con parámetro real λ .

a) (0,5 puntos) Hallar los planos del haz que pasan por el punto $P = (1, 1, 1)$.

b) (1 punto) Hallar los planos del haz cuya distancia al punto $Q(3, -2, 1)$ es $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

c) (1 punto) Hallar los planos del haz que cumplen que el ángulo que forman con el eje OY tiene por seno el valor $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

SOLUCIÓN.

a) Sustituimos las coordenadas del punto: $1+\lambda-1-\lambda=0 \Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow$ Todos los planos del haz pasan por P (P pertenece a la recta común del haz).

$$\text{b) } \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{|(1+\lambda)3 + 2 - \lambda|}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + 1 + \lambda^2}} = \frac{|2\lambda + 5|}{\sqrt{2 + 2\lambda + \lambda^2}} \Rightarrow 2|2\lambda + 5| = 3\sqrt{2}\sqrt{2 + 2\lambda + \lambda^2} \Rightarrow |2\lambda + 5| = 3\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}$$

$$\Rightarrow (|2\lambda + 5|)^2 = 9(1 + \lambda + \lambda^2) \Rightarrow 4\lambda^2 + 20\lambda + 25 = 9 + 9\lambda + 9\lambda^2 \Rightarrow 5\lambda^2 - 11\lambda - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 320}}{10} = \frac{11 \pm 21}{10} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \Rightarrow -y + z = 0 \\ \lambda = \frac{16}{5} \Rightarrow \frac{21}{5}x - y - \frac{16}{5}z = 0 \Rightarrow 21x - 5y - 16z = 0 \end{cases}$$

c) Un vector direccional de OY es $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ y un vector normal al plano $\vec{n} = (1+\lambda, -1, -\lambda)$.

Si es α el ángulo que forman la recta y el plano, se tiene:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha = \frac{|\vec{e}_2 \cdot \vec{n}|}{|\vec{e}_2| |\vec{n}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{|-1|}{\sqrt{1+2\lambda+\lambda^2+1+\lambda^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda^2+2\lambda+2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{12} \sqrt{\lambda^2+\lambda+1} &= 6 \Rightarrow \lambda^2+\lambda+1=3 \Rightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -2 \end{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \pi_1 \equiv 2x-y-z=0 &; \quad \pi_2 \equiv -x-y+2z=0\end{aligned}$$