Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(2,5 puntos)* Sea m un número real y considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Determine todos los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

b) *(1 punto)* Determine, si existe, la inversa de A cuando $m = 0$.

c) *(0,5 puntos)* Determine, si existe, la inversa de A^2cuando $m = 0$.

SOLUCIÓN

a) $\exists\, A^{-1}\ \forall m$ tal que $|A| \neq 0$: $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 1 \neq 0\ \forall m \Rightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall m$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos la matriz adjunta de A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ y por tanto: $(\mathrm{Adj}\, A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculemos ahora la matriz traspuesta de la adjunta: $(\mathrm{Adj}\, A)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Y como $|A| = -1$, la matriz inversa de A es: $A^{-1} = \dfrac{(\mathrm{Adj}\, A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A^2 = A \cdot A \Rightarrow (A^2)^{-1} = (A \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. *(2,5 puntos)* Dados el punto $P \equiv (1, -1, 0)$, y la recta:

$$s : \begin{cases} -2x + z - 1 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine la ecuación general del plano $(Ax + By + Cz + D = 0)$ que contiene al punto P y a la recta s.

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$ y la recta s.

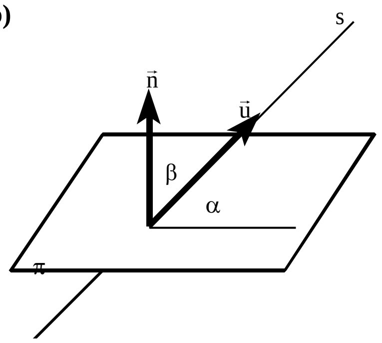
SOLUCIÓN.

a) La ecuación del haz de planos que contienen a la recta s es: $-2x + z - 1 + \lambda(3x - y - 3) = 0$.

Obtengamos la ecuación del plano que contiene al punto $P(1,-1,0)$:

$$-2-1+\lambda(3+1-3)=0 \;\Rightarrow\; \lambda=3 \;\Rightarrow\; -2x+z-1+9x-3y-9=0 \;\Rightarrow\; 7x-3y+z-10=0$$

b)



El ángulo α que forman el plano y la recta es el complementario del β que forman los vectores $\vec{u}$ (direccional de la recta) y $\vec{n}$ (normal al plano).

• Obtengamos dos puntos de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para } x=0:\; y=-3 \;,\; z=1 \;\Rightarrow\; A(0,-3,1) \\ \text{Para } x=1:\; y=0 \;,\; z=3 \;\Rightarrow\; B(1,0,3) \end{array}\right| \quad \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,3,2)$$

• El vector normal al plano: $\vec{n}=(2,1,-1)$

Entonces: $$\cos\beta=\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}||\vec{n}|}\right|=\frac{2+3-2}{\sqrt{1+9+4}\sqrt{4+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{84}}\simeq 0{,}3273 \;\Rightarrow\; \beta=70^\circ 53'36'' \;\Rightarrow\; \alpha=90^\circ-\beta=19^\circ\, 6'\, 24''$$

3. *(2,5 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+2}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine las asíntotas, horizontales, verticales y oblicuas, que tenga la función $f(x)$.

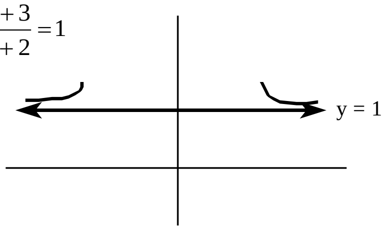
b) *(1 punto)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. ¿Tiene la función $f(x)$ algún máximo o mínimo relativo?

SOLUCIÓN.

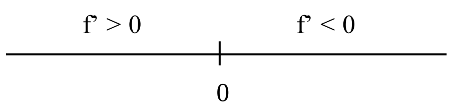
a) • Asíntotas verticales: no tiene

• Asíntotas horizontales: $y=1$ es una asíntota horizontal pues $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2+2}=1$

Además: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x^2+2}=1^+$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2+2}=1^+$



b) $f'(x)=\frac{2x(x^2+2)-(x^2+3)2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2x}{(x^2+2)^2}=0 \;\Rightarrow\; x=0$. Se tiene:



es decir, la función es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$.

Como la función es continua, en $x=0$ tiene un máximo relativo pues pasa de creciente a decreciente.

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Usando el cambio de variable $t = ln(x)$, determine el valor de la integral:

$$\int \frac{1 + 3\ln(x) + (\ln(x))^3}{x(1-(\ln(x))^2)}dx$$

b) *(1,25 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(cos(x)\right)^{\left(\frac{1}{sen(x)}\right)^2}$$

SOLUCIÓN.

a) $t = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad dx = x\,dt$

$$\int \frac{1+3\ln(x)+(\ln(x))^3}{x\left(1-(\ln(x))^2\right)}dx = \int \frac{1+3t+t^3}{\cancel{x}\left(1-t^2\right)}\cancel{x}\,dt = \int \frac{t^3+3t+1}{-t^2+1}dt = \int \left(-t+\frac{4t+1}{1-t^2}\right)dt = -\frac{t^2}{2}+\int \frac{4t+1}{1-t^2}dt = (1)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll|l} t^3 & +3t+1 & -t^2+1 \\ \cline{3-3} -t^3 & +t & -t \\ \cline{1-2} & 4t+1 & \end{array}}$$

$$\frac{4t+1}{1-t^2} = \frac{A}{1+t}+\frac{B}{1-t} = \frac{A-At+B+Bt}{(1+t)(1-t)} = \frac{(-A+B)t+A+B}{1-t^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -A+B=4 \\ A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \quad 2B=5 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{5}{2} \quad , \quad A=1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$\int \frac{4t+1}{1-t^2}dt = -\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{5}{2}\int\frac{dt}{1-t} = -\frac{3}{2}\ln(1+t)+\frac{5}{2}\ln(1-t)$$

$$(1) = -\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}\ln(1+t)+\frac{5}{2}\ln(1-t)+K = -\frac{1}{2}\ln^2(x)-\frac{3}{2}\ln(1+\ln(x))+\frac{5}{2}\ln(1-\ln(x))+K$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\left(\frac{1}{\text{sen } x}\right)^2} = 1^\infty$.

- Una forma: aplicamos logaritmos y tenemos en cuenta que $\ln \text{lím } f(x) = \text{lím } \ln f(x)$:

$$\ln \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\left(\frac{1}{\text{sen } x}\right)^2} = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{\text{sen } x}\right)^2\cdot\ln(\cos x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(\cos x)}{\text{sen}^2 x}\right] = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{-\text{sen } x}{\cos x}}{2\,\text{sen } x\cos x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{-\text{sen } x}{2\,\text{sen } x\cos^2 x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{2\cos^2 x}\right] = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\left(\frac{1}{\text{sen } x}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

- Otra forma: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\left(\frac{1}{\text{sen } x}\right)^2} = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\left(\frac{1}{\text{sen } x}\right)^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\text{sen}^2 x}} \overset{L'H}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\text{sen}x}{2\,\text{sen } x\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}}$

OPCIÓN B

1. *(2,5 puntos)* Considere las matrices de orden 2 x 2 siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine dos matrices M y N de orden 2 x 2 tales que:

$$\begin{cases} AM + BN = D \\ AM = N \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz G de orden 3 x 3, cuyas columnas se representan por C_1, C_2, C_3 y cuyo determinante vale 2. Considere ahora la matriz H cuyas columnas son C_3, $C_3 + C_2$, $3C_1$, ¿cuál es el determinante de esta nueva matriz H?

SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} AM + BN = D \\ AM = N \end{cases} \Leftrightarrow \; N + BN = D \; \Leftrightarrow \; (I+B)N = D \; \Leftrightarrow \; N = (I+B)^{-1} \cdot D$

$$I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtengamos $(I+B)^{-1}$:

$$(\mathrm{Adj}(I+B)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \;,\; (\mathrm{Adj}(I+B))^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;,\; (I+B)^{-1} = \frac{(\mathrm{Adj}(I+B))^t}{|I+B|} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ pues } |I+B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Por tanto: $N = (I+B)^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

De la segunda ecuación: $M = A^{-1} \cdot N$

Calculemos A^{-1}: $(\mathrm{Adj}\,A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \;,\; (\mathrm{Adj}\,A)^t = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \;,\; A^{-1} = \frac{(\mathrm{Adj}\,A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 \\ -2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$ pues $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -9$

Y por tanto: $M = A^{-1} \cdot N = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 \\ -2/9 & -1/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/3 \\ -4/9 & -1/3 \end{pmatrix}$

b) $|G| = |C_1 \;\; C_2 \;\; C_3| = 2$

$$|H| = |C_3 \;\; C_3 + C_2 \;\; 3C_1| \overset{(1)}{=} |C_3 \;\; C_3 \;\; 3C_1| + |C_3 \;\; C_2 \;\; 3C_1| \overset{(2)}{=} 0 - |3C_1 \;\; C_2 \;\; C_3| \overset{(3)}{=} -3|C_1 \;\; C_2 \;\; C_3| = -3|G| = -6$$

Propiedades aplicadas:

(1) Descomposición de un determinante en suma de otros dos por tener la segunda columna como una suma.

(2) Un determinante con dos columnas iguales es nulo. Al permutar dos columnas, el determinante cambia su signo.

(3) Cuando todos los elementos de una columna están multiplicados por un mismo número, su determinante queda multiplicado por ese número

2. *(2,5 puntos)* Considere las rectas:

$$r:\begin{cases}2x-4z=2\\ x+y+z=1\end{cases} \qquad\qquad s:\ \frac{x}{2}=\frac{y+2}{a}=\frac{z-(1/2)}{1}$$

a) *(2 puntos)* Determine la posición relativa de dichas rectas, según los diferentes valores de a.

b) *(0,5 puntos)* Si $a=2$, determine el ángulo que forman las rectas r y s.

SOLUCIÓN.

a) Obtengamos un vector direccional de la recta r:

$$\begin{cases}2x-4z=2\\ x+y+z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\text{Para } z=0:\ x=1\ ,\ y=0 \ \Rightarrow\ A(1,0,0)\\ \text{Para } z=1:\ x=3\ ,\ y=-3 \ \Rightarrow\ B(3,-3,1)\end{matrix} \Rightarrow\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,-3,1)$$

De la recta s, un punto es $P\left(0,-2,\frac{1}{2}\right)$ y un vector direccional $\vec{v}=(2,a,1)$

• Si $a=-3$: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (sus coordenadas son proporcionales) y las rectas son paralelas o coinciden. Para decidir entre una posición u otra, consideramos un vector con origen en r y extremo en s:

$\overrightarrow{AP}=\left(-1,-2,\frac{1}{2}\right)\ \|\ \vec{w}=(2,4,-1)$ y como no tiene la misma dirección que $\vec{u}$ y $\vec{v}$, las rectas son paralelas.

• Si $a\neq-3$: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distintas direcciones (sus coordenadas no son ahora proporcionales) y las rectas se cortan o se cruzan. Estudiemos la dependencia lineal de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

$$\begin{vmatrix}2&2&2\\-3&a&4\\1&1&-1\end{vmatrix}=-2a-6+8-2a-6-8=-4a-12\neq0 \ \text{ para } a\neq-3 \ \Rightarrow \ \text{las dos rectas se cruzan.}$$

b) Sea α el ángulo que forman las dos rectas.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}=\frac{|4-6+1|}{\sqrt{4+9+1}\,\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{3\sqrt{14}}\simeq0{,}0891 \ \Rightarrow\ \alpha=84^{\circ}\,53'\,20''$$

3. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$g(x)=\frac{e^x}{x+1}$$

b) *(1 punto)* Determine:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x}$$

SOLUCIÓN.

a) $g'(x)=\dfrac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\dfrac{x\,e^x}{(x+1)^2}=0 \ \Rightarrow\ x=0$ (punto crítico)

$$g''(x)=\frac{\left(e^x+x\,e^x\right)(x+1)^2-x\,e^x\,2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{e^x(x+1)\left[(x+1)^2-2x\right]}{(x+1)^4}=\frac{e^x\left(x^2+1\right)}{(x+1)^3}$$

$g''(0)>0 \;\Rightarrow\;$ En $x=0$ la función tiene un mínimo relativo: $(0\,,1)$

$g(x)$ no tiene puntos de inflexión pues $g''(x)\neq 0\;\;\forall x.$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x}\right)\left(\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}\right)}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x+2-3x^2-x}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{3x^2}+\sqrt{3x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Determine la integral:

$$\int x^2\,sen(2x)dx$$

b) *(1,25 puntos)* Determine el área máxima que puede tener un rectángulo cuya diagonal mide 8 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima?

SOLUCIÓN.

a) Utilizamos el método de integración por partes: $\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$

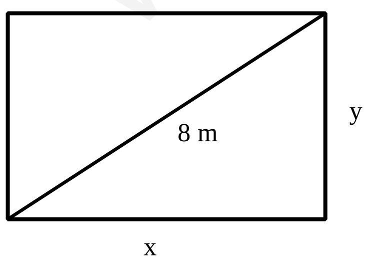
$$\left.\begin{array}{l} u=x^2 \;\Rightarrow\; du=2x\,dx \\ dv=sen(2x)dx \;\Rightarrow\; v=\frac{1}{2}\int sen(2x)\cdot 2dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)\end{array}\right|\;\Rightarrow\;\int x^2 sen(2x)dx=-\frac{1}{2}x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}2\int x\cos(2x)dx\;=(1)$$

Resolvamos $\int x\cos(2x)dx$ también por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u=x \;\Rightarrow\; du=dx \\ dv=\cos(2x)dx \;\Rightarrow\; v=\frac{1}{2}\int\cos(2x)2dx=\frac{1}{2}sen(2x)\end{array}\right|\;\Rightarrow\;\int x\cos(2x)dx=\frac{1}{2}x\,sen(2x)-\frac{1}{2}\int sen(2x)dx=\frac{1}{2}x\,sen(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)$$

Por tanto: $\;(1)=-\frac{x^2}{2}\cos(2x)+\frac{x}{2}sen(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+K$

b) La función que debe ser máxima es la superficie del rectángulo: $\;S=x\cdot y$



La relación entre las variables x e y: $\;x^2+y^2=64\;\Rightarrow\;y=\sqrt{64-x^2}$

Por tanto: $\;S=x\cdot y=x\cdot\sqrt{64-x^2}=\sqrt{64x^2-x^4}\;$ máxima

$$S'=\frac{128x-4x^3}{2\sqrt{64x^2-x^4}}=\frac{64x-2x^3}{\sqrt{64x^2-x^4}}=0\;\Rightarrow\;2x\left(32-x^2\right)=0\;\;\begin{array}{l}x=0\\ x=4\sqrt{2}\end{array}$$

De los dos valores críticos, $x=0\;\;(y=8)$ hace la superficie del rectángulo mínima y $x=4\sqrt{2}\;\;\left(y=4\sqrt{2}\right)$, la hace máxima.

Se trata por tanto de un cuadrado de lado $4\sqrt{2}$ m y de área 32 m^2.