



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3 puntos)

- a) (2 puntos) Determine para qué valores de k el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned}x + y + kz &= 6 \\x + ky + z &= 0 \\kx - y + z &= -6\end{aligned}$$

- b) (1 punto) Resuélvalo, si es posible, cuando $k = -1$.

SOLUCIÓN.

La matriz A de los coeficientes y la matriz B ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 6 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ k & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Estudiemos y comparemos el rango de ambas matrices según los valores de k :

El mayor rango posible de ambas es 3. El único menor de orden 3 de A es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = k + k - k - k^3 - 1 + 1 = -k^3 + k = 0 \Rightarrow k(-k^2 + 1) = 0 \Rightarrow k = 0, k = -1, k = 1$$

- Para $k \neq 0, -1$ y 1 : $\text{rg}A = \text{rg}B = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

- Para $k = 0$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

Como el menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}A = 2$

Orlamos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0 \Rightarrow \text{rg}A = \text{rg}B = 2 < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{el sistema es compatible indeterminado.}$$

- Para $k = -1$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

Como el menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A = 2$

Orlemos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 6 - 6 + 6 = 0 \Rightarrow \text{rg} A = \text{rg} B = 2 < n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{el sistema es compatible indeterminado}$$

▪ Para $k=1$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -6 \end{array} \right)$

El menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A = 2$

Orlemos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 6 - 6 + 6 = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} B = 3 \Rightarrow \text{rg} A \neq \text{rg} B \Rightarrow \text{el sistema es incompatible}$$

b) Para $k=-1$ el sistema es compatible indeterminado. Consideremos las dos primeras ecuaciones y la incógnita z como parámetro ($z=\lambda$):

$$\begin{cases} x+y=6+\lambda \\ x-y=-\lambda \end{cases} \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3, y=3+\lambda, z=\lambda$$

2. (2 puntos) Determine la ecuación de la recta, **expresada como intersección de dos planos**, que pasa por el punto $(1, -1, 2)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (2, -1, 0)$.

SOLUCIÓN.

El vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ es perpendicular al plano y, por tanto, direccional de la recta:

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (1, -1, -1) \end{array} \quad \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right| = -2\vec{i} - 2\vec{k} - 2\vec{k} + 2\vec{j} = (-2, 2, -4) // (1, -1, 2)$$

La ecuación continua de la recta es: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+1=y+1 \\ 2x-2=z-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ que es la ecuación de la recta expresada como intersección de dos planos.

3. (5 puntos)

a) (1 punto) Determine, si existen, todos los valores de los parámetros a y b para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ b(1 - e^{x-1}) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Considere ahora que $a = 1$. Usando la definición de derivada, estudie si la función es derivable en $x = 0$.

c) (1,5 puntos) Determine:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x)) \frac{1}{e^x}$$

d) (1,5 puntos) Determine:

$$\int \frac{(\ln(x))^2}{\sqrt{x}} dx$$

SOLUCIÓN.

a) Las funciones definidas en cada uno de los trozos son continuas (exponencial, polinómica). Habrá que exigir la continuidad de la función en los puntos de empalme $x=0$ y $x=1$:

▪ Continuidad en $x=0$: debe ser $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (ae^x) = ae^0 = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x^2) = 1 \end{aligned} \right| \Rightarrow a=1$$

▪ Continuidad en $x=1$: debe ser $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [b(1-e^{x-1})] = b(1-e^0) = 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \text{la función es continua en } x=1 \text{ independientemente del valor de } b.$$

Por tanto, la función es continua para $a=1$ y $\forall b$.

b) La función, en el entorno de $x=0$, está definida así: $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

Para $a=1$ sabemos que la función es continua en $x=0$. Recordemos que $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y que para que la

función sea derivable en $x=a$ debe ser $f'(a^-) = f'(a^+) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{1} = 1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x^2-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{la función no es derivable en } x=0$$

$$c) L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) \frac{1}{e^x} = \infty^0 \text{ (indeterminación)} \Rightarrow \ln L = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) \frac{1}{e^x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left((\ln x) \frac{1}{e^x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^x} \ln(\ln x) \right] = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$(L'Hôpital) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot e^x} = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

d) Resolvamos la integral por el método de partes:

$$I = \int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{aligned} u &= (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ dv &= \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow v = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x} \end{aligned} \right| = 2\sqrt{x} \cdot (\ln x)^2 - \int 2\sqrt{x} \cdot 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= 2\sqrt{x} \cdot (\ln x)^2 - 4 \int (\ln x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow v = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x} \end{array} \right| =$$

$$= 2\sqrt{x} \cdot (\ln x)^2 - 4 \left[2\sqrt{x} \ln x - \int 2\sqrt{x} \frac{1}{x} dx \right] = 2\sqrt{x} \cdot (\ln x)^2 - 8\sqrt{x} \ln x + 8 \int x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} \cdot (\ln x)^2 - 8\sqrt{x} \ln x + 16\sqrt{x} + C$$

OPCIÓN B

1. (3 puntos)

a) (1,5 puntos) Determine la matriz inversa, si existe, de la matriz siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

En caso de que exista, compruebe que la matriz encontrada es efectivamente la inversa de la matriz M .

b) (1,5 puntos) Determine la matriz $A^2 + B^2$ siendo A y B las matrices solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.

$$a) |M| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

Calculemos la matriz inversa: $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adj}(M)} \text{Adj}(M) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj}(M))^t} (*)$

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1, & M_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, & M_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, & M_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & M_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ M_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, & M_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, & M_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, & M_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$

$$(*) \xrightarrow{(\text{Adj}(M))^t} (\text{Adj}(M))^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{M^{-1}} M^{-1} = \frac{(\text{Adj}(M))^t}{|M|} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprobemos que M^{-1} es la matriz inversa de M :

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{luego, en efecto, lo es.}$$

b) Calculemos las matrices A y B :

$$\left. \begin{array}{l} 2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right| \Rightarrow \text{Sumando: } 3A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=A-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A^2=\begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13/9 & 2/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix} \\ B^2=\begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/9 & -2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right| \Rightarrow A^2+B^2=\begin{pmatrix} 13/9 & 2/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1/9 & -2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14/9 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (2 puntos)

a) (1,5 puntos) Determine el valor del parámetro "a" para que el plano

$$\pi : x - 3y + az = -6$$

sea paralelo a la recta:

$$r : \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 3z = -7 \end{cases}$$

b) (0,5 puntos) Determine el ángulo entre esa recta r y el plano:

$$\tilde{\pi} : 2x - 3y - z + 6 = 0$$

SOLUCIÓN.

a) El vector $\vec{n}=(1, -3, a)$ es normal al plano π .

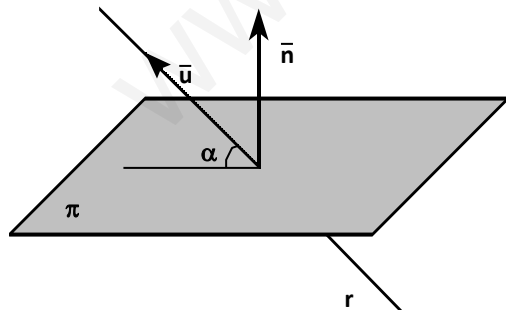
Obtenemos un vector $\vec{u}$ direccional de la recta r. Para ello, necesitamos obtener dos puntos de la misma:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ x + 3z = -7 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Para } x=-1: y=-1, z=-2 \Rightarrow A(-1, -1, -2) \\ \text{Para } x=2: y=1, z=-3 \Rightarrow B(2, 1, -3) \end{array} \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3, 2, -1)$$

El plano y la recta son paralelos si los vectores $\vec{n}$ y $\vec{u}$ son perpendiculares $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 - 6 - a = 0 \Rightarrow a = -3$$

b) $\vec{n}=(2, -3, -1)$ es un vector normal al plano π y $\vec{u}=(3, 2, -1)$ un vector direccional de la recta r. El ángulo α que forman la recta y el plano es el complementario del que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$.



De la definición del producto escalar se tiene:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{|6 - 6 + 1|}{\sqrt{9+4+1} \sqrt{4+9+1}} = \frac{1}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90^\circ - \alpha = 85^\circ 54' 14,24'' \Rightarrow \alpha = 4^\circ 5' 45,76''$$

3. (5 puntos)

a) (3 puntos) Considere la función:

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

a. 1) (1,5 puntos) Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a. 2) (1,5 puntos) Determine los extremos relativos y puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) (2 puntos) Determine el área limitada por la curva $f(x) = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, y las rectas $x = 0$, $x = \pi$ y el eje de abscisas $y = 0$.

SOLUCIÓN.

a.1) ▪ Dominio: $f(x) = x + \frac{4}{x} = \frac{x^2 + 4}{x}$ es una función racional cuyo dominio es: $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

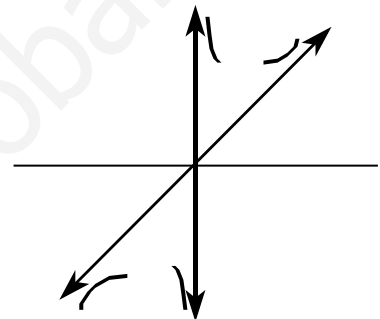
▪ Asíntotas: La función tiene una asíntota vertical $x=0$ pues

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{4}{x}\right) = \infty$. La posición relativa de la curva respecto a la asíntota es:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{4}{x}\right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{4}{x}\right) = +\infty$$

La forma en que está expresada la función nos indica que la recta $y=x$ es una asíntota oblicua de la función. La posición relativa de la curva respecto a la asíntota es:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x}\right) = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x}\right) = 0^+$$



a.2) $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2$ (puntos críticos)

$$f''(x) = \frac{8x}{x^4} = \frac{8}{x^3} \quad \left| \quad \begin{array}{l} f''(-2) < 0 \Rightarrow \text{En } x = -2 \text{ la función tiene un máximo relativo: } (-2, -4) \\ f''(2) > 0 \Rightarrow \text{En } x = 2 \text{ la función tiene un mínimo relativo: } (2, 4) \end{array} \right.$$

Puesto que $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in D(f)$ la función no tiene puntos de inflexión.

b) Calculemos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas:

$-2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0 + k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = 0, x = 2\pi, \dots$ luego entre $x=0$ y $x=\pi$ no hay otros puntos de corte.

Tenemos:

$$A = \left| \int_0^\pi \left[-2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx \right| = \left| -4 \int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} dx \right| = \left| \left[4 \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi \right| = \left| \left(4 \cos \frac{\pi}{2}\right) - (4 \cos 0) \right| = |-4| = 4 \text{ u}^2$$