



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
Convocatoria extraordinaria 2022

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A .

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{cases}$$

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X . Dibuje la gráfica de f , la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$, sea derivable.

4. Análisis:

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$ b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) dx$ c) $\int x^2 \sin x dx$ d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta

$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0, 1, 0)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a . Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π .

7. Estadística y Probabilidad:

- a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.
- b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

8. Estadística y Probabilidad:

- a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.
- b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A .

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

a) La matriz A es antisimétrica si $A^T = -A \Rightarrow A^T + A = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T + A = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_{11} & 1+a_{21} \\ 1+a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{11} = 0 \rightarrow a_{11} = 0 \\ 1+a_{21} = 0 \rightarrow a_{21} = -1 \\ 2a_{22} = 0 \rightarrow a_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa de } A$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si B no tiene inversa su determinante es nulo.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{vmatrix} = -b_{12} = 0 \Rightarrow b_{12} = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^{-1}B + A$. La inversa de A está calculada en el apartado a).

$$A^{-1}B + A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1-b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la condición de que $\det(A^{-1}B + A) = -1$

$$\det(A^{-1}B + A) = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1-b_{22} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow 1 - b_{22} = -1 \Rightarrow b_{22} = 2$$

Los valores buscados son $b_{12} = 0$ y $b_{22} = 2$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{cases}$$

Transformamos el sistema en otro más sencillo de estudiar.

$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \\ -(m+1)x - my - z = 0 \\ \hline (m-2)z = -3 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m-2)z = -3 \end{cases}$$

Observando los elementos de la diagonal del sistema nos planteamos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $m \neq 2$ y $m \neq -1$

En este caso el sistema se puede resolver despejando y resolviendo en cadena.
El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 2$

En este caso el sistema queda

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ y = -2 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

La tercera ecuación plantea una igualdad imposible.
El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $m = -1$

En este caso el sistema queda

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ y - 3z = -2 \\ -3z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ y - 3z = -2 \\ \boxed{z = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 1 = 0 \\ y - 3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \boxed{y = 1} \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).
Las soluciones son: $x = t, y = 1, z = 1, t \in \mathbb{R}$

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f , la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$, sea derivable.

a) Hallamos la tangente a $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

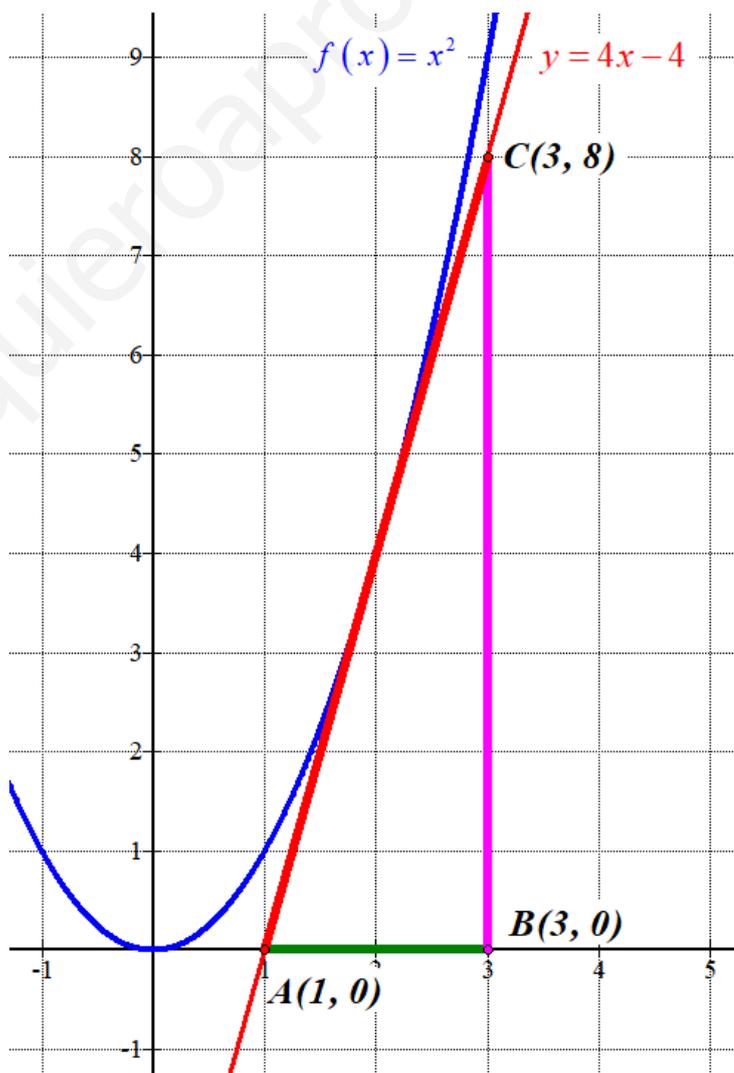
$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 2^2 = 4 \\ f'(2) = 4 \\ y - f(2) = f'(2)(x - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \Rightarrow \boxed{y = 4x - 4}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la situación planteada.

x	$f(x) = x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9

x	$y = 4x - 4$
1	0
2	4
3	8



Las coordenadas de los vértices del triángulo son A(1, 0), B(3, 0) y C(3, 8).

b) Para ser derivable primero debe ser continua.
 Continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx = a + b \\ f(1) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a + b = 1}$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ y su derivada es $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2ax + b = 2a + b \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{2a + b = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a + b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b &= 1 - a \\ 2a + b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow \boxed{b = 1 - (-1) = 2}$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = 2$.

4. Análisis:

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ b) $\int (\sin x)\sin(\cos x)dx$ c) $\int x^2 \sin x dx$ d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$

a)

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2+1=t \rightarrow 2xdx=dt \\ dx=\frac{dt}{2x} \end{array} \right\} = \int \cancel{2x} \sqrt{t} \frac{dt}{\cancel{2x}} = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} =$$

$$= \frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ t = x^2 + 1 \end{array} \right\} = \boxed{\frac{2}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + K}$$

b)

$$\int (\sin x)\sin(\cos x)dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{-\sin x} \end{array} \right\} = \int (\cancel{\sin x}) \sin(t) \frac{dt}{\cancel{-\sin x}} =$$

$$= -\int \sin(t) dt = \cos t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el} \\ \text{cambio de variable} \\ t = \cos x \end{array} \right\} = \boxed{\cos(\cos x) + K}$$

c)

$$\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = \sin x dx \rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right\} = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \dots$$

$$\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x)$$

$$\dots = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) = \boxed{-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + K}$$

d)

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$1 = A(x-2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 1 = B \\ x=1 \rightarrow 1 = -A \rightarrow A = -1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\dots = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = \boxed{-\ln|x-1| + \ln|x-2| + K}$$

5. Geometría:

- a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0, 1, 0)$.
 b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

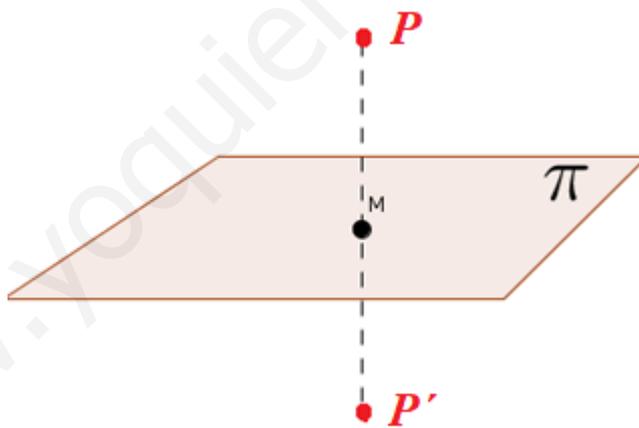
- a) El plano que contiene a la recta tiene como uno de sus vectores directores el director de la recta $\vec{v}_r = (3, 2, 1)$. El otro vector director del plano es el vector $\overrightarrow{PQ_r}$, que une el punto P con un punto Q_r de la recta.

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} Q_r(-1, -2, -3) \\ \vec{v}_r = (3, 2, 1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PQ_r} = (-1, -2, -3) - (0, 1, 0) = (-1, -3, -3) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (3, 2, 1) \\ P(0, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x - 9y + 9 - 2z + 9z + y - 1 + 6x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0}$$

- b) Debemos de hallar el punto P' del dibujo.



Hallamos la recta s perpendicular al plano que pasa por el punto P.

$$\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (3, -8, 7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{n} = (3, -8, 7) \\ P(11, -14, 13) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 11 + 3\lambda \\ y = -14 - 8\lambda \\ z = 13 + 7\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\pi : 3x - 8y + 7z + 8 = 0$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 11 + 3\lambda \\ y = -14 - 8\lambda \\ z = 13 + 7\lambda \end{cases} \Rightarrow 3(11 + 3\lambda) - 8(-14 - 8\lambda) + 7(13 + 7\lambda) + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33 + 9\lambda + 112 + 64\lambda + 91 + 49\lambda + 8 = 0 \Rightarrow 122\lambda = -244 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 11 - 6 = 5 \\ y = -14 + 16 = 2 \\ z = 13 - 14 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(5, 2, -1)}$$

El punto P' simétrico de P respecto del plano π se obtiene sumando al punto M el vector \overline{PM} .

$$\overline{PM} = (5, 2, -1) - (11, -14, 13) = (-6, 16, -14)$$

$$P' = M + \overline{PM} = (5, 2, -1) + (-6, 16, -14) = (-1, 18, -15)$$

El punto P' simétrico de P respecto del plano π tiene coordenadas $P'(-1, 18, -15)$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a . Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π .

Obtenemos un punto y un vector de la recta.

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-1, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, k, 3) \end{cases}$$

Para que plano y recta sean paralelos o la recta esté contenida en el plano el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares, es decir, con producto escalar 0.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0 \rightarrow \vec{n} = (a, 4, 3a) \\ \vec{v}_r = (1, k, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (a, 4, 3a) \cdot (1, k, 3) = a + 4k + 9a = 10a + 4k$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow 10a + 4k = 0 \Rightarrow \boxed{5a + 2k = 0}$$

Se plantean dos situaciones diferentes.

Si $5a + 2k \neq 0$ entonces recta y plano son secantes. Coinciden en un único punto.

Si $5a + 2k = 0$ entonces plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Para que la recta esté contenida en el plano el punto P_r de la recta debe pertenecer al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-1, 1, 0) \in \pi \\ \pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -a + 4 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

Esta última situación se divide en dos situaciones diferentes:

Si $5a + 2k = 0$ y $a = 6$ la recta está contenida en el plano.

Si $5a + 2k = 0$ y $a \neq 6$ recta y plano son paralelos.

Resumiendo: Si $5a + 2k \neq 0$ recta y plano son secantes. Si $5a + 2k = 0$ y $a \neq 6$ recta y plano son paralelos. Si $5a + 2k = 0$ y $a = 6$ la recta está contenida en el plano.

Esta última condición se traduce en
$$\left. \begin{array}{l} 5a + 2k = 0 \\ a = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 30 + 2k = 0 \Rightarrow k = -15.$$

Si $k = -15$ y $a = 6$ la recta está contenida en el plano.

¿En qué situaciones recta y plano son perpendiculares?

El vector normal del plano y el director de la recta deben tener coordenadas proporcionales, pues deben indicar la misma dirección.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0 \rightarrow \vec{n} = (a, 4, 3a) \\ \vec{v}_r = (1, k, 3) \\ \vec{n} \parallel \vec{v}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{4}{k} = \frac{3a}{3} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{4}{k} \Rightarrow \boxed{a \cdot k = 4}$$

La condición es que $a \cdot k = 4$.

7. Estadística y Probabilidad:

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

a)

Si el 60% de los clásicos son novelas significa que $0.60 \cdot 0.40 = 0.24$, el 24 por ciento del total son novelas y clásicos.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Novela	No novela	
Clásicos	24		40
No clásicos			
	70		100

Completamos la tabla.

	Novela	No novela	
Clásicos	24	16	40
No clásicos	46	14	60
	70	30	100

Mirando en la tabla tenemos que la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico es del $16/100 = 0.16$.

Mirando en la tabla tenemos que la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una

novela es $\frac{\text{Nº de novelas y clásicos}}{\text{Nº de novelas}} = \frac{24}{70} \approx 0.343$

b) El suceso contrario a “se resuelva por lo menos 1” es que no se resuelva ninguno.

$$P(\text{Se resuelva al menos 1}) = 1 - P(\text{No se resuelve ninguno}) = 1 - 0.80 \cdot 0.80 \cdot 0.80 = \boxed{0.488}$$

8. Estadística y Probabilidad:

- a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.
- b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

a)

Resolvemos el problema utilizando la distribución binomial.

X = Número de aciertos al responder 60 preguntas.

Los parámetros son $n = 60$ y $p =$ probabilidad de acertar una pregunta $= 1/4 = 0.25$.

$$X = B(60, 0.25)$$

Aproximamos esta binomial por una normal pues el número de repeticiones es muy alto.

Comprobamos la bondad de la aproximación.

$n \cdot p = 60 \cdot 0.25 = 15 > 5$ y también $n \cdot q = 60 \cdot 0.75 = 45 > 5$. La aproximación es buena.

Aproximamos la binomial por una normal de parámetros media $= \mu = np = 15$ y desviación

$$\text{típica } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3.35$$

$$X = B(60, 0.25) \text{ se aproxima con una normal } Y = N\left(15, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$$

Nos piden calcular $P(X \geq 16)$.

$$P(X \geq 16) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 15.5) = 1 - P(Y \leq 15.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = 1 - P\left(Z \leq \frac{15.5 - 15}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}\right) = 1 - P(Z \leq 0.15) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla}\} = 1 - 0.5596 = \boxed{0.4404}$$

b) $X(25, 2)$

$$P(X < 24) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{24 - 25}{2}\right) = P(Z < -0.5) =$$

$$= P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$

Respondemos a la segunda cuestión.

$$\begin{aligned}P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) &= P(X < 25 + \alpha) - P(X < 25 - \alpha) = \{\text{Tipificamos}\} = \\&= P\left(Z < \frac{25 + \alpha - 25}{2}\right) - P\left(Z < \frac{25 - \alpha - 25}{2}\right) = P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z < \frac{-\alpha}{2}\right) = \\&= P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z \geq \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1\end{aligned}$$

Como debe ser igual a 0.2128 tenemos que:

$$2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0.2128 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 1.2128 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1.2128}{2} = 0.6064$$

Buscamos en la tabla y tenemos que:

$$\frac{\alpha}{2} = 0.27 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.54}$$