

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra

Despeixe X da ecuación matricial $AB(X - I) = C$, onde I é a matriz identidade (asuma que o produto AB ten inversa). Logo, calcule X se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números e Álgebra

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análise

- a) Calcule os límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, onde $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x .
 b) Debuxe a gráfica dunha función f continua e non negativa no intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ no intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ no intervalo $(2,3)$ e f é constante no intervalo $(1,2)$.

4. Análise

Obteña a función f , sabendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ e que a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x = 0$ é $y = 3x - 1$.

5. Xeometría

- a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $P(1, -1, 0)$ e é perpendicular á recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$.
 b) Calcule os dous puntos da recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuxa distancia ao plano $\pi: x - 1 = 0$ é igual a 2.

6. Xeometría

- a) Ache os valores de k e de m que fan que os puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ e $C(k, 2, 0)$ estean aliñados.
 b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ e $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade

- a) Se $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabendo que A e B son sucesos incompatibles. Canto valería $P(A)$ se supuxésemos que A e B son, en lugar de incompatibles, independentes?
 b) Nunha certa cidade, o 21% das persoas len ciencia ficción, o 63% len novela negra, e o 17% len tanto ciencia ficción como novela negra. Se se elixe ao azar unha persoa desa cidade, calcule:
 • A probabilidade de que lea novela negra sabendo que le ciencia ficción.
 • A probabilidade de que non lea nin ciencia ficción nin novela negra.

8. Estatística e Probabilidade

- a) Calcule o valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ se X segue unha distribución normal de media 1 e desviación típica 3.
 b) Calcule o valor de α que fai que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ se X segue unha distribución normal de media μ e desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra

Despeje X de la ecuación matricial $AB(X - I) = C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análisis

a) Calcule los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ en el intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

4. Análisis

Obtenga la función f , sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

5. Geometría

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1, -1, 0)$ y es perpendicular a

la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Calcule los dos puntos de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi: x - 1 = 0$ es igual a 2.

6. Geometría

a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(k, 2, 0)$ estén alineados.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad

a) Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8. Estadística y Probabilidad

a) Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

ABAU 2022
CONVOCATORIA ORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

1. **Números e Álgebra** (2 puntos): **0.75** por despegar X , **0.5** por calcular $(AB)^{-1}$, e **0.75** por calcular X .
2. **Números e Álgebra** (2 puntos): **0.5** polo estudo do rango da matriz de coeficientes, **0.5** polo estudo do rango da matriz ampliada, **1** = 0.25×4 polas catro conclusións.
3. **Análise** (2 puntos)
 - a) 1 punto: **0.5** por cada un dos dous límites.
 - b) 1 punto: **0.25** por establecer relacións entre os datos e o debuxo pedido e **0.75** polo debuxo.
4. **Análise** (2 puntos): **1** = $0.5 + 0.5$ polas dúas integrais, **0.5** por ter en conta que $f(0) = -1$ e $f'(0) = 3$, **0.5** pola determinación da función.
5. **Xeometría** (2 puntos)
 - a) 1 punto: **0.5** polos elementos que determinan o plano, **0.5** pola ecuación pedida.
 - b) 1 punto: **0.25** por coñecer a fórmula da distancia, **0.75** polos dous puntos pedidos.
6. **Xeometría** (2 puntos)
 - a) 1 punto: **0.25** pola formulación do problema, **0.75** pola determinación de k e de m .
 - b) 1 punto: **0.5** pola posición relativa, **0.5** polo punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por cada un dos dous casos.
- b) 1 punto: **0.5** por cada unha das dúas probabilidades pedidas.

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.25** pola tipificación, **0.25** por chegar a $P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$ e **0.5** por chegar á solución.
- b) 1 punto: **0.25** pola tipificación, **0.25** por chegar a $P(Z \leq \alpha/4) - P(Z \leq -\alpha/4) = 0.8064$, **0.25** por chegar a $P(Z \leq \alpha/4) = 0.9032$ e **0.25** pola obtención do valor de α .

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

Despexe X da ecuación matricial $AB(X - I) = C$, onde I é a matriz identidade (asuma que o produto AB ten inversa). Logo, calcule X se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Calcule os límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, onde $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x .

b) Debuxe a gráfica dunha función f continua e non negativa no intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ no intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ no intervalo $(2,3)$ e f é constante no intervalo $(1,2)$.

4. Análise:

Obteña a función f , sabendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ e que a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x = 0$ é $y = 3x - 1$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $P(1, -1, 0)$ e é perpendicular á recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Calcule os dous puntos da recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuxa distancia ao plano $\pi: x - 1 = 0$ é igual a 2.

6. Xeometría:

a) Ache os valores de k e de m que fan que os puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ e $C(k, 2, 0)$ estean aliñados.

b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ e $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Se $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabendo que A e B son sucesos incompatibles. Canto valería $P(A)$ se supuxésemos que A e B son, en lugar de incompatibles, independentes?

b) Nunha certa cidade, o 21% das persoas len ciencia ficción, o 63% len novela negra, e o 17% len tanto ciencia ficción como novela negra. Se se elixe ao azar unha persoa desa cidade, calcule:

- A probabilidade de que lea novela negra sabendo que le ciencia ficción.
- A probabilidade de que non lea nin ciencia ficción nin novela negra.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule o valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ se X segue unha distribución normal de media 1 e desviación típica 3.

b) Calcule o valor de α que fai que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ se X segue unha distribución normal de media μ e desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Despeje X de la ecuación matricial $AB(X - I) = C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2 - m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análisis:

a) Calcule los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ en el intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

4. Análisis:

Obtenga la función f , sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1, -1, 0)$ y es perpendicular a

la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Calcule los dos puntos de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi: x - 1 = 0$ es igual a 2.

6. Geometría:

a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(k, 2, 0)$ estén alineados.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

1.

$$AB(X - I) = C \Leftrightarrow X - I = (AB)^{-1}C \Leftrightarrow X = I + (AB)^{-1}C.$$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

•

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \det(AB) = 8 - 6 = 2.$$

•

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -8 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -8 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

•

$$(AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$X = I + (AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2. A notación F_i indicará «fila i ». Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\begin{pmatrix} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 3-m & m^2-m & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 0 & 2(m^2-m) & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 0 & m^2-m & 0 \end{pmatrix}.$$

Sistema triangular equivalente:
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ (m^2-m)z = 0. \end{cases}$$

$$m^2 - m = m(m-1) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 1\} \quad \text{e} \quad m-3 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = 0, \quad y = \frac{1}{m-3}, \quad x = 0.$$

- Se $m \in \{0, 1\}$, temos
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y = 1, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$\left[z = \lambda, \quad y = \frac{1}{m-3}, \quad x = -m\lambda \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Se $m = 3$, temos
$$\begin{cases} x + 3z = 1, \\ 6z = 1, \\ 6z = 0. \end{cases}$$

O sistema é incompatible, porque a segunda e a terceira ecuación non se poden cumprir á vez.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA – EXERCICIO 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & m-3 \\ 0 & m-3 \end{vmatrix} = m-3$ e $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & m^2-m \end{vmatrix} = m^2-m$ non se anulan á vez, tense que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\begin{aligned} \det A &= m^2(m-3) + (m-3)(m^2-m) - m(m-3) = (m-3)(m^2 + m^2 - m - m) \\ &= (m-3)(2m^2 - 2m) = 2m(m-1)(m-3) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 1, 3\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.^\circ$ de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = n.^\circ$ de incógnitas, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $m = 1$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = n.^\circ$ de incógnitas, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $m = 3$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 6 - 9 = -12 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = 1,$$

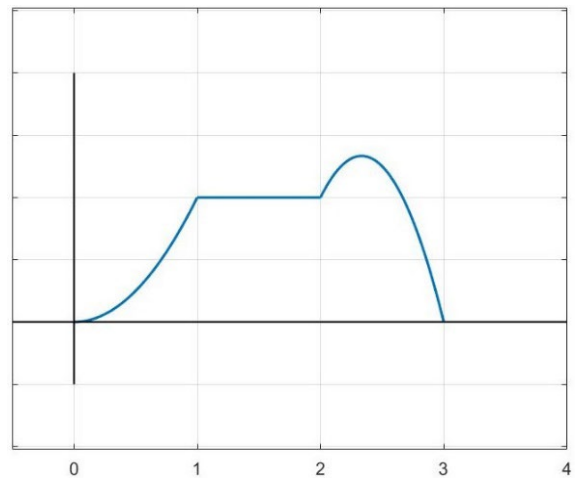
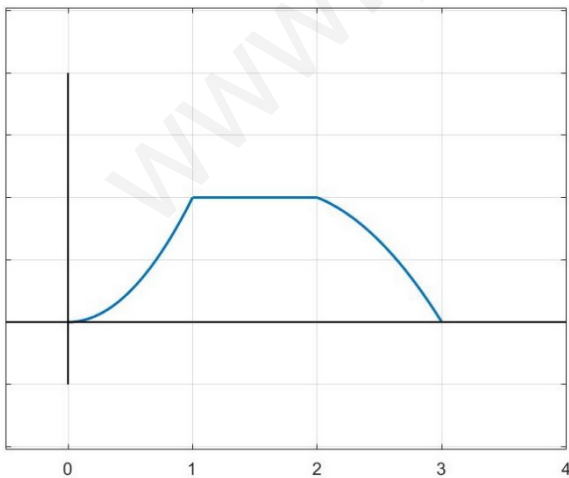
onde L'H indica o uso da regra de L'Hôpital para tratar unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$. Falando con rigor, o que asegura a regra de L'Hôpital é que o primeiro límite existe e vale 1 porque o último existe e vale 1.

Analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

onde L'H indica o uso da regra de L'Hôpital para tratar unha indeterminación do tipo $\frac{-\infty}{\infty}$.

3.b) A función f é convexa no intervalo $(0,1)$ e cóncava no intervalo $(2,3)$. Posto que ten que ser continua e non negativa no intervalo $[0,3]$, e ademais cumprir $f(0) = f(3) = 0$ e ser constante no intervalo $(1,2)$, a súa gráfica debe seguir algún dos seguintes patróns:



MATEMÁTICAS II

4.

Integrando $f''(x) = 2x - e^{-x}$ obtense

$$f'(x) = x^2 + e^{-x} + C_1,$$

e, integrando esta última,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + C_1x + C_2 \quad (C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes}).$$

Posto que a tanxente á gráfica de f en $(0, f(0))$ é $y = 3x - 1$, téñense que cumprir

$$f(0) = y(0) = -1, \quad f'(0) = y' = 3.$$

De $f(0) = -1 + C_2 = -1$ e $f'(0) = 1 + C_1 = 3$ obtéñense os valores $C_1 = 2$ e $C_2 = 0$, co cal

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 2x.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) π pasa polo punto $P(1, -1, 0)$ e é normal a $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(1, 0, 0)$. Logo

$$\pi: x - 1 = 0.$$

5.b) Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, a distancia de P a π é

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Entón a distancia dun punto xenérico da recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$, ao plano $\pi: x - 1 = 0$ é

$$d(P(\lambda, \lambda, \lambda), \pi) = |\lambda - 1|.$$

Como

$$|\lambda - 1| = 2 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 3\},$$

os dous puntos buscados son

$$P(-1, -1, -1) \text{ e } Q(3, 3, 3).$$

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Os puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ e $C(k, 2, 0)$ están aliñados se, e só se, $\overrightarrow{AB}(2 - k, -3, 2 - m)$ e $\overrightarrow{AC}(0, -1, -m)$ son proporcionais.

De $2 - k = 0$ dedúcese que $k = 2$, e de $\frac{-3}{-1} = \frac{2-m}{-m}$ dedúcese que $3m = m - 2$, é dicir, $m = -1$.

6.b) Posición relativa das rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ e $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$.

- Como $\vec{d}_r(2, 3, 2)$ e $\vec{d}_s(3, 2, 3)$ non son proporcionais ($\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$), non son nin paralelas nin coincidentes, polo que ou ben se cortan, ou ben se cruzan.
- $[P(1, -1, 2) \in r, Q(-2, -3, -1) \in s] \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(-3, -2, -3)$.

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (dúas columnas iguais)} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}, \vec{d}_r \text{ e } \vec{d}_s \text{ son coplanarios} \\
 \Rightarrow r \text{ e } s \text{ córtanse.}$$

- Punto de corte:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = -1 + 3\lambda, \\ z = 2 + 2\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s: \begin{cases} x = -2 + 3\mu, \\ y = -3 + 2\mu, \\ z = -1 + 3\mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda = -2 + 3\mu \\ -1 + 3\lambda = -3 + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - 3\mu = -3 \\ 3\lambda - 2\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda - 6\mu = -6 \\ 9\lambda - 6\mu = -6 \end{cases} \Rightarrow 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Logo o punto de corte é

$$R(1 + 2 \cdot 0, -1 + 3 \cdot 0, 2 + 2 \cdot 0) = R(1, -1, 2).$$

MATEMÁTICAS II

7.

7.a)

- Se A e B son incompatibles, $P(A \cap B) = 0$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} = 0.08\bar{3}.$$

- Se A e B son independientes, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}P(A)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P(A) \Leftrightarrow \frac{3}{4}P(A) = \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{9} = 0.\bar{1}.$$

7.b) CF = "ler ciencia ficción", NN = "ler novela negra".

$$P(\text{CF}) = 0.21, \quad P(\text{NN}) = 0.63, \quad P(\text{CF} \cap \text{NN}) = 0.17.$$

•

$$P(\text{NN}|\text{CF}) = \frac{P(\text{NN} \cap \text{CF})}{P(\text{CF})} = \frac{0.17}{0.21} \approx 0.8095.$$

•

$$P(\overline{\text{CF}} \cap \overline{\text{NN}}) = P(\overline{\text{CF} \cup \text{NN}}) = 1 - P(\text{CF} \cup \text{NN}).$$

$$P(\text{CF} \cup \text{NN}) = P(\text{CF}) + P(\text{NN}) - P(\text{CF} \cap \text{NN}) = 0.21 + 0.63 - 0.17 = 0.67.$$

$$P(\overline{\text{CF}} \cap \overline{\text{NN}}) = 1 - 0.67 = 0.33.$$

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA – EJERCICIO 7.b):

Vese na táboa de continxencia

	CF	$\overline{CF}$	Totais
NN	17	46	63
$\overline{NN}$	4	33	37
Totais	21	46	100

que

$$P(NN|CF) = \frac{17}{21} \approx 0.8095$$

e

$$P(\overline{CF} \cap \overline{NN}) = 0.33.$$

MATEMÁTICAS II

8.

8.a)

$$X \rightarrow N(1,3) \Rightarrow Z = \frac{X-1}{3} \rightarrow N(0,1).$$

$$\begin{aligned} P(-2 \leq X \leq 7) &= P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - \{1 - P(Z \leq 1)\} \\ &= P(Z \leq 2) + P(Z \leq 1) - 1 \approx 0.9772 + 0.8413 - 1 = \mathbf{0.8185}. \end{aligned}$$

8.b)

$$X \rightarrow N(\mu, 4) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{4} \rightarrow N(0,1).$$

$$\begin{aligned} 0.8064 &= P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = P\left(-\frac{\alpha}{4} \leq Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{4}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - \{1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right)\} = 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - 1. \end{aligned}$$

Logo

$$2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 1.8064 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 0.9032,$$

conque, segundo a táboa,

$$\frac{\alpha}{4} \approx 1.3 \Leftrightarrow \alpha \approx \mathbf{5.2}.$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra

a) Obteña a matriz antisimétrica A de orde 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Logo, calcule a súa inversa no caso de que exista. **Nota:** a_{ij} é o elemento que está na fila i e na columna j de A .

b) Sexa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, ache os valores de b_{12} e de b_{22} sabendo que B non ten inversa e que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números e Álgebra

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análise

a) Obteña as coordenadas dos vértices do triángulo rectángulo cuxa hipotenusa é tanxente á gráfica de $f(x) = x^2$ no punto de abscisa $x = 2$ e que, ademais, ten un cateto de lonxitude 2 situado sobre o eixe X . Debuxe a gráfica de f , a recta tanxente e o triángulo.

b) Ache os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

4. Análise

Calcule as seguintes integrais:

a) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$. b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx$. c) $\int x^2 \sin x \, dx$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$.

5. Xeometría

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Xeometría

Estude a posición relativa da recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e o plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función dos parámetros k e a . Logo, se é posible, diga cando r é perpendicular a π .

7. Estatística e Probabilidade

a) Nunha famosa biblioteca, o 70% dos libros son novelas, o 40% son clásicos anteriores ao século XIX e o 60% dos clásicos son novelas. Se se elixe nesa biblioteca un libro ao azar, calcule a probabilidade de que non sexa unha novela, pero si un clásico, e a probabilidade de que sexa un clásico sabendo que é unha novela.

b) Nun certo país, o 80% dos delitos contra a propiedade quedan sen resolver. Se nunha localidade dese país se cometeron 3 deses delitos, calcule a probabilidade de que se resolva polo menos 1.

8. Estatística e Probabilidade

a) Faise un exame tipo test con 60 preguntas e 4 opcións por pregunta, das que só unha é correcta. Calcule a probabilidade de acertar polo menos 16 preguntas se se responden as 60 ao azar.

b) Se X segue unha distribución normal de media 25 e desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Logo, calcule o valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A .

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números y Álgebra

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X . Dibuje la gráfica de f , la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

4. Análisis

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$. b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx$. c) $\int x^2 \sin x \, dx$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$.

5. Geometría

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Geometría

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a . Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π .

7. Estadística y Probabilidad

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

8. Estadística y Probabilidad

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

ABAU 2022
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, pero, nalgúns casos, pode haber outras formas correctas de solucionarlos.

1. Números e Álgebra (2 puntos):

- a) 0.75 puntos: **0.25** por determinar a matriz A , **0.5** por calcular a súa inversa.
- b) 1.25 puntos: **0.25** por deducir que $b_{12} = 0$ a partir da singularidade de B , **0.5** por calcular $A^{-1}B + A$ e **0.5** por deducir da igualdade $\det(A^{-1}B + A) = -1$ que $b_{22} = 2$.

2. Números e Álgebra (2 puntos): **0.5** pola resolución da ecuación $\det A = 0$ (onde A é a matriz de coeficientes), **0.75** polo estudo dos rangos da matriz de coeficientes e da matriz ampliada, **0.75** = 0.25×3 polas conclusións (tres casos).

3. Análise (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.25** pola ecuación da recta tanxente, **0.5** polo debuxo, **0.25** por especificar as coordenadas dos vértices.
- b) 1 punto: **0.5** pola condición de continuidade, **0.5** pola determinación de a e b .

4. Análise (2 puntos):

- a) **0.5** puntos.
- b) **0.5** puntos.
- c) **0.5** puntos.
- d) 0.5 puntos: **0.25** pola expresión en suma de fraccións simples, **0.25** polo cálculo final.

5. Xeometría (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por especificar os elementos que determinan o plano e **0.5** pola ecuación.
- b) 1 punto: **0.25** pola recta perpendicular, **0.25** polo punto de corte, **0.5** polo punto simétrico.

6. Xeometría (2 puntos): **0.25** por chegar á condición $5a + 2k = 0$, **1.5** $= 0.5 \times 3$ por distinguir os tres casos posibles e **0.25** por deducir a condición de perpendicularidade.

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por cada unha das dúas probabilidades que se piden.
- b) 1 punto: **0.25** por identificar a distribución binomial e **0.75** polo cálculo da probabilidade pedida.

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por chegar a $P(X \geq 16) \approx P(\tilde{X} \geq 15.5)$, con $\tilde{X}$ normal, **0.25** por chegar a $P(Z \geq 0.15)$ e **0.25** polo resultado.
- b) 1 punto: **0.25** por calcular $P(X < 24)$, **0.5** por chegar a $P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) = 0.6064$ e **0.25** pola obtención de α .

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

a) Obteña a matriz antisimétrica A de orde 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Logo, calcule a súa inversa no caso de que exista. **Nota:** a_{ij} é o elemento que está na fila i e na columna j de A .

b) Sexa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, ache os valores de b_{12} e de b_{22} sabendo que B non ten inversa e que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Obteña as coordenadas dos vértices do triángulo rectángulo cuxa hipotenusa é tanxente á gráfica de $f(x) = x^2$ no punto de abscisa $x = 2$ e que, ademais, ten un cateto de lonxitude 2 situado sobre o eixe X . Debuxar a gráfica de f , a recta tanxente e o triángulo.

b) Ache os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

4. Análise:

Calcule as seguintes integrais:

$$\text{a) } \int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx. \quad \text{b) } \int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx. \quad \text{c) } \int x^2 \sin x \, dx. \quad \text{d) } \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx.$$

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Xeometría:

Estude a posición relativa da recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e o plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función dos parámetros k e a . Logo, se é posible, diga cando r é perpendicular a π .

7. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha famosa biblioteca, o 70% dos libros son novelas, o 40% son clásicos anteriores ao século XIX e o 60% dos clásicos son novelas. Se se elixe nesa biblioteca un libro ao azar, calcule a probabilidade de que non sexa unha novela, pero si un clásico, e a probabilidade de que sexa un clásico sabendo que é unha novela.

b) Nun certo país, o 80% dos delitos contra a propiedade quedan sen resolver. Se nunha localidade dese país se cometeron 3 deses delitos, calcule a probabilidade de que se resolva polo menos 1.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Faise un exame tipo test con 60 preguntas e 4 opcións por pregunta, das que só unha é correcta. Calcule a probabilidade de acertar polo menos 16 preguntas se se responden as 60 ao azar.

b) Se X segue unha distribución normal de media 25 e desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Logo, calcule o valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A .

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análisis:

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X . Dibujar la gráfica de f , la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

4. Análisis:

Calcule las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx. \quad \text{b) } \int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx. \quad \text{c) } \int x^2 \sin x \, dx. \quad \text{d) } \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx.$$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a . Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π .

7. Estadística y Probabilidad:

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

8. Estadística y Probabilidad:

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II

1.

1.a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz pedida. Posto que $\det A = 1$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$. Como B non ten inversa, debe ser $\det B = -b_{12} = 0$, de onde $b_{12} = 0$. Logo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

- $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- $A^{-1}B + A = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 - b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Agora de

$$\det(A^{-1}B + A) = 1 - b_{22} = -1,$$

dedúcese que $b_{22} = 2$.

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ m+1 & m & m-1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ 0 & 0 & m-2 & -3 \end{array} \right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m-2)z = -3. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{-3}{m-2}, \quad y = -2 - (m-2)z, \quad x = \frac{-my - z}{m+1}.$$

- Se $m = -1$, temos

$$\begin{cases} -y + z = 0, \\ y - 3z = -2, \\ -3z = -3, \end{cases}$$

e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$[x = \lambda, \quad y = 1, \quad z = 1], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Se $m = 2$, o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda $0 = -3$.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m-2 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ m+1 & m & m-1 & -3 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} m+1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = m+1$ e $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} = m(m-2) - 1$ non se anulan á vez, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} m+1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m-2 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} \\ &= (m+1)(m-1) + m(m-2)(m+1) - (m+1) - m(m-2)(m+1) \\ &= (m+1)(m-1) - (m+1) = (m+1)(m-1-1) = (m+1)(m-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow m \in \{-1, 2\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = -1$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2 + 4 + 3 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $m = 2$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 4 = 3 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$.

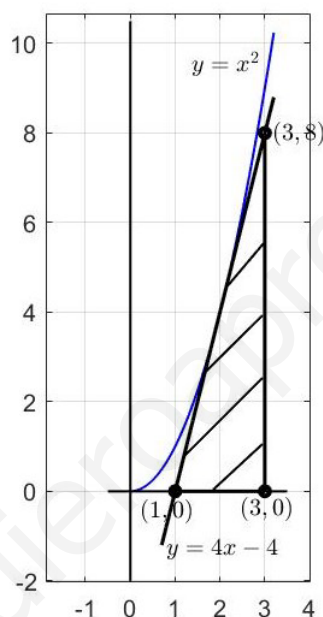
A ecuación da recta tanxente á gráfica de f en $x = 2$ é $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, é dicir, $y - 4 = 4(x - 2)$ ou, equivalentemente,

$$y = 4x - 4.$$

Corte da recta co eixe X : $4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ao ter lonxitude 2 o cateto que está sobre o eixe X , os vértices do triángulo son **A(1, 0)**, **B(3, 0)** e **C(3, 8)**.

A situación é a do debuxo seguinte:



3.b) Hai que achar a e b que fagan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

Basta facer o estudo en $x = 1$.

Para ser derivable, a función debe ser continua, polo que os límites laterais $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ teñen que existir e valer $f(1)$. Agora observemos que, por unha banda, $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ e, pola outra, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + bx) = a + b$. En consecuencia, ten que ser $b = 1 - a$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + (1 - a)x & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1, \\ 2ax + 1 - a & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax + 1 - a) = 2a + 1 - a = a + 1,$$

e polo tanto f é derivable se, e só se, $a = -1$ (para que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$) e $b = 1 - a = 2$.

MATEMÁTICAS II

4.

4.a) Facendo o cambio $z = x^2 + 1$ (co cal $dz = 2x \, dx$) vese que

$$\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx = \int \sqrt{z} \, dz = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2 + 1)^3} + C.$$

4.b) Facendo o cambio $z = \cos x$ (co cal $dz = -\sin x \, dx$) vese que

$$\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx = -\int \sin z \, dz = \cos z + C = \cos(\cos x) + C.$$

4.c) Integrando por partes coas eleccións

$$\begin{aligned} u &= x^2 & du &= 2x \, dx \\ dv &= \sin x \, dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

chégase a

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx.$$

Aplicando partes de novo coas eleccións

$$\begin{aligned} u &= x & du &= dx \\ dv &= \cos x \, dx & v &= \sin x \end{aligned}$$

tense finalmente que

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

4.d)

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}.$$

Tense que cumprir que $(A+B)x - 2A - B = 1$, polo que A e B son a solución do sistema

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -2A - B = 1. \end{cases}$$

Sumando as dúas ecuacións vese que

$$-A = 1 \Rightarrow A = -1,$$

conque

$$B = -A = 1.$$

Así pois,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

co cal

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln \frac{|x-2|}{|x-1|} + C.$$

MATEMÁTICAS II

5. a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

5.a) Ecuación implícita do plano π que contén a $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa por $P(0,1,0)$:

$Q(-1, -2, -3)$ é un punto de r . O plano pedido pasa por $P(0,1,0)$ e é paralelo ao vector director de r , $\vec{d}_r(3,2,1)$, e ao vector $\overrightarrow{QP}(1,3,3)$, polo que a súa ecuación implícita é

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6x + y - 1 + 9z - 2z - 3x - 9(y-1) = 3x - 8y + 7z + 8.$$

$$\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0.$$

5.b) Punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto a $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(11, -14, 13)$ e é perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(3, -8, 7), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 11 + 3\lambda, \\ y = -14 - 8\lambda, \\ z = 13 + 7\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de r con π :

$$3(11 + 3\lambda) - 8(-14 - 8\lambda) + 7(13 + 7\lambda) + 8 = 33 + 9\lambda + 112 + 64\lambda + 91 + 49\lambda + 8 = 122\lambda + 244 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Logo o punto de corte é $Q(11 - 6, -14 + 16, 13 - 14) = Q(5, 2, -1)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto,

$$\begin{aligned} \frac{11 + x'}{2} &= 5 \Leftrightarrow 11 + x' = 10 \Leftrightarrow x' = -1, \\ \frac{-14 + y'}{2} &= 2 \Leftrightarrow -14 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 18, \\ \frac{13 + z'}{2} &= -1 \Leftrightarrow 13 + z' = -2 \Leftrightarrow z' = -15. \end{aligned}$$

Tense logo $P'(-1, 18, -15)$.

MATEMÁTICAS II

6. Posición relativa de r : $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e π : $ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de k e a :

$\vec{d}_r(1, k, 3)$ é vector director de r , e $\vec{n}_\pi(a, 4, 3a)$ é normal a π .

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = a + 4k + 9a = 10a + 4k = 2(5a + 2k).$$

Se $5a + 2k = 0$, entón $\vec{d}_r$ e $\vec{n}_\pi$ son perpendiculares, conque nese caso ou ben $r \subset \pi$, ou ben $r \parallel \pi$ (entendendo que $r \cap \pi = \emptyset$). Supoñamos $5a + 2k = 0$ e tomemos $P(-1, 1, 0)$, que é un punto de r . É claro que $r \subset \pi$ se, e só se, $P \in \pi$.

$$P \in \pi \Leftrightarrow -a + 4 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 6.$$

Conclusión:

- Se $a = 6$ e $k = \frac{-5a}{2} = \frac{-30}{2} = -15$, $r \subset \pi$.
- Se $5a + 2k = 0$ e $a \neq 6$, $r \parallel \pi$.
- Se $5a + 2k \neq 0$, r e π córtanse nun punto.

Se é posible, diga cando r é perpendicular a π :

Obsérvese que

$$\vec{d}_r \parallel \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{k}{4} = \frac{3}{3a} \Leftrightarrow ak = 4,$$

polo que r é perpendicular a π se, e só se, $ak = 4$.

MATEMÁTICAS II

7.

7.a) N = “ser novela”, C = “ser clásico”. Sábese que $P(N) = 0.7$, $P(C) = 0.4$ e $P(N|C) = 0.6$.

	C	$\bar{C}$	
N	$40 \times 0.6 = 24$	46	70
$\bar{N}$	16	14	30
	40	60	100

Segundo a táboa de continxencia,

$$P(\bar{N} \cap C) = \frac{16}{100} = 0.16$$

e

$$P(C|N) = \frac{24}{70} \approx 0.3429.$$

ALTERNATIVA para 7.b):

$$P(N \cap C) = P(N|C)P(C) = 0.6 \times 0.4 = 0.24,$$

$$P(\bar{N} \cap C) = P(C) - P(N \cap C) = 0.4 - 0.24 = 0.16.$$

Por outra banda,

$$P(C|N) = \frac{P(N \cap C)}{P(N)} = \frac{0.24}{0.7} \approx 0.3429.$$

7.b) X = “n.º de delitos que se resolven, de entre os 3”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 3$ e $p = 0.2$. Tense logo $q = 1 - p = 0.8$. Pídese $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} p^0 q^3 = (0.8)^3 = 0.512,$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.512 = 0.488.$$

MATEMÁTICAS II

8.

8.a) $X =$ "n.º de preguntas acertadas, de entre as 60".

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 60$ e $p = 0.25$. Tense logo $q = 1 - p = 0.75$. Pídese $P(X \geq 16)$.

$np = 15$, $nq = 45$, $npq = 11.25$, $\sqrt{npq} \approx 3.3541$. Como $np > 5$ e $nq > 5$, X pode aproximarse por $\tilde{X} \rightarrow N(15, 3.3541)$.

$$Z = \frac{\tilde{X} - 15}{3.3541} \rightarrow N(0, 1).$$

Aplicando a corrección de Yates ou de medio punto,

$$\begin{aligned} P(X \geq 16) &\approx P(\tilde{X} \geq 15.5) = P\left(Z \geq \frac{15.5 - 15}{3.3541}\right) \approx P(Z \geq 0.15) = 1 - P(Z < 0.15) \\ &\approx 1 - 0.5596 = \mathbf{0.4404}. \end{aligned}$$

8.b) $X \rightarrow N(25, 2)$, conque $Z = \frac{X - 25}{2} \rightarrow N(0, 1)$.

$$\begin{aligned} P(X < 24) &= P\left(Z < \frac{24 - 25}{2}\right) = P(Z < -0.5) = P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) \approx 1 - 0.6915 \\ &= \mathbf{0.3085}. \end{aligned}$$

Por outra banda,

$$\begin{aligned} 0.2128 &= P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = P\left(-\frac{\alpha}{2} < Z < \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - \{1 - P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right)\} = 2P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - 1, \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} 2P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) &= 1.2128, \\ P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) &= 0.6064, \\ \frac{\alpha}{2} &\approx 0.27, \\ \alpha &\approx \mathbf{0.54}. \end{aligned}$$