

ÍNDICE:

Páxina 3	CONVOCATORIA ORDINARIA 2020.
Páxina 15	CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2020.

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só se corruxirán as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Pídese:

- Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: neste caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.)
- Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A + B)^T$ a trasposta de $A + B$.

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.

b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f .

4. Análise:

a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 + bx + c & \text{se } x > 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x = 0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1) dx$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ e $C(7,1,5)$.

b) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que é perpendicular ao plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ e que pasa polo punto $P(-1, -2, 2)$.

6. Xeometría:

Estude a posición relativa das rectas r e s definidas polas ecuacións $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ e $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:

Selecciónanse 250 pacientes para estudar a eficacia dun novo medicamento. A 150 deles adminístraselles o medicamento, mentres que o resto son tratados cun placebo. Sabendo que se curaron o 80% dos que tomaron o medicamento, cal é a probabilidade de que, seleccionado un paciente ao azar, tomase o placebo ou non curase?

8. Estatística e Probabilidade:

Nunha cadea de montaxe, o tempo empregado para realizar un determinado traballo segue unha distribución normal de media 20 minutos e desviación típica 4 minutos. Calcule a probabilidade de que se faga ese traballo nun tempo comprendido entre 16 e 26 minutos.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, solo se corregirán las 5 primeras respondidas.

1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

- Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: en este caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.)
- Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^T$ la traspuesta de $A + B$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$$

3. Análisis:

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f .

4. Análisis:

a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + bx + c & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable en $x = 0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1)dx$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1,-2,2)$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con un placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

8. Estadística y Probabilidad:

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, e pode haber outras formas correctas de solucionarlos.

1. **Números e Álgebra** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.25 puntos polo cálculo de A , 0.25 puntos polo cálculo de B e 0.5 puntos polo cálculo de $A^2 - B^2$.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos por despegar X e calcular a inversa que naturalmente xurde e 0.5 puntos polo cálculo final de X .
2. **Números e Álgebra** (2 puntos): 0.5 puntos por chegar a que os valores críticos son $m = \pm 1$ e 0.5 puntos polo estudo de cada un dos tres casos que se presentan.
3. **Análise** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.5 puntos por cada unha das dúas veces que se aplica a regra de L'Hôpital.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos por determinar os intervalos nos que a derivada ten signo constante e 0.5 puntos por encontrar o mínimo.
4. **Análise** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.5 puntos polo estudo da continuidade e 0.5 puntos polo estudo da derivabilidade.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos polo cálculo da primitiva e 0.5 puntos polo cálculo do valor da integral definida.
5. **Xeometría** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan o plano e 0.5 puntos por dar a ecuación pedida.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan a recta e 0.5 puntos por dar as ecuacións pedidas.
6. **Xeometría** (2 puntos): 1 punto pola posición relativa e 1 punto polo punto de corte.
7. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos): se M é “tomar o medicamento” e C é “curarse”, 1 punto por chegar a $P(\overline{M \cap C})$ e 1 punto polo cálculo final.
8. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos): 1 punto por chegar a $P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1)$ e 1 punto polo resto do exercicio.

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

1. Números e Álgebra:

Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Pídese:

a) Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: neste caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.)

b) Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A + B)^T$ a trasposta de $A + B$.

Solución:

1.a) Nótese que $2A = A + B + A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, de onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Polo tanto, $B = A + B - A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$, tense finalmente que

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.b) En primeiro lugar, imos despexar X :

$$XA + (A + B)^T = 2I + XB \Leftrightarrow X(A - B) = 2I - (A + B)^T \Leftrightarrow X = [2I - (A + B)^T](A - B)^{-1}.$$

Non hai ningún problema no último paso porque $A - B$ é invertible: $\det(A - B) = 16 \neq 0$.

- Cálculo de $2I - (A + B)^T$: como $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$2I - (A + B)^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Cálculo de $(A - B)^{-1}$: ao ser $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $\det(A - B) = 16$,

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tras estes cálculos, resulta

$$X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$$

Solución:

A notación F_i indicará "fila i ". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - mF_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & m & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - mF_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & 0 & -1 + m^2 & -2m^2 \end{array} \right).$$

Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro:

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y - mz = 2m, \\ (-1 + m^2)z = -2m^2, \end{cases}$$

para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión, que queda como segue:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{-2m^2}{-1 + m^2}, \quad y = 2m + mz, \quad x = -z.$$

- Se $m \in \{-1, 1\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación queda $0 = -2$.

Solución alternativa:

Sexan $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array} \right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, cúmprese que $2 \leq \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3$ e tamén, conseguintemente, que $\text{rank } A = 2$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 1\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.$ de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- Caso $m \in \{-1, 1\}$: $\text{rank } A = 2$. Por outra banda, ao ser $\begin{vmatrix} m & 0 & 2m \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & \pm 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mp 2 \neq 0$, sábese que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

3. Análise:

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.

b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f .

Solución:

3.a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}} \xrightarrow{\text{indeterminación } \frac{0}{0}, \text{ L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x}{e^{2x} - 1} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}.$$

Falando con rigor, o límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$, e, análogamente, o límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$.

3.b)

$$f(x) = x(\ln x - 1), \text{Dom}(f) = (0, \infty).$$

$$f'(x) = \ln x - 1 + x \frac{1}{x} = \ln x.$$

Vese que f' ten signo negativo en $(0,1)$ e positivo en $(1, \infty)$:



Segundo esta análise, f é estritamente decrecente en $(0,1)$ e estritamente crecente en $(1, \infty)$. Dado que ademais é continua en $(0, \infty)$, conclúese que ten un mínimo absoluto (logo relativo) en $x = 1$ e que non ten outros extremos.

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

4. Análise:

- a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 + bx + c & \text{se } x > 0 \end{cases}$, sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x = 0$.
- b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1)dx$.

Solución:

4.a)

- **Continuidade:** nótese que $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} = 1$, e, para calquera valor de $b \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + bx + c = c$. Por conseguinte, f é continua en $x = 0$ se, e soamente se, $(b, c) \in \mathbb{R} \times \{1\}$.
- **Derivabilidade:** posto que f ten que ser continua para poder ser derivable, é obrigado que $c = 1$, e así $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 + bx + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ e $f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & \text{se } x < 0, \\ 2x + b & \text{se } x > 0. \end{cases}$ Como f é continua, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2e^{2x} = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + b) = b$, a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $b = 2$ e $c = 1$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):

Do mesmo xeito que na solución anterior, chégase a $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 + bx + 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$ xa que c ten que valer 1. Agora, como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2e^{2x} = 2$ (o asterisco $*$ indica o uso da regra de L'Hôpital) e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + bx + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + b) = b$, conclúese que a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $b = 2$ e $c = 1$.

4.b) Aplicando a fórmula de integración por partes con

$$u = \ln x - 1, \quad du = \frac{1}{x} dx,$$

$$dv = x dx, \quad v = \frac{1}{2} x^2,$$

obtense

$$\int x(\ln x - 1)dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x - 1) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x - 1) - \frac{1}{4} x^2 + C = \frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) + C,$$

e polo tanto

$$\int_1^2 x(\ln x - 1)dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) \right]_1^2 = 2 \left(\ln 2 - \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right) = 2 \ln 2 - 3 + \frac{3}{4} = \ln 4 - \frac{9}{4} \approx -0.8637.$$

MATEMÁTICAS II **EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS**

5. Xeometría:

- a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ e $C(7,1,5)$.
 b) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que é perpendicular ao plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ e que pasa polo punto $P(-1, -2, 2)$.

Solución:

5.a) Se π é o plano pedido, π pasa por $A(3,0,-1)$ e está xerado por $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ e $\overrightarrow{AC}(4,1,6)$, co cal

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Posto que $\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6x - 18 + 8y + z + 1 - 4z - 4 - 2x + 6 - 6y = 4x + 2y - 3z - 15$, a
 ecuación implícita do plano é $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.

5.b) O vector normal ao plano π é un vector director de r : $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(4,2,-3)$. Obtéñense así as seguintes ecuacións paramétricas de r :

$$r: \begin{cases} x = -1 + 4\lambda, \\ y = -2 + 2\lambda, \\ z = 2 - 3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

6. Xeometría:

Estude a posición relativa das rectas r e s definidas polas ecuacións $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ e $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

Solución:

$\vec{d}_r(2, -1, -2)$ e $\vec{d}_s(1, 4, 3)$ son vectores directores de r e s , respectivamente. Como $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4}$, r e s non son paralelas nin coincidentes. Consecuentemente, ou ben se cruzan, ou ben se cortan. Pódese discernir cal das dúas situacións se dá a partir das ecuacións paramétricas. En efecto, ao ser

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -1 - 2\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -3 + 4\mu, \\ z = -2 + 3\mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R},$$

as rectas r e s cortaranse se, e só se, o sistema lineal $\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu, \\ -\lambda = -3 + 4\mu, \end{cases}$ ten solución única e ademais esa solución satisfai tamén a igualdade $-1 - 2\lambda = -2 + 3\mu$.

$$\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu \\ -\lambda = -3 + 4\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = -3 \\ -\lambda - 4\mu = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = -3 \\ -2\lambda - 8\mu = -6 \end{cases}.$$

Sumando as dúas últimas ecuacións obtemos $-9\mu = -9$, de onde $\mu = 1$, o que implica $\lambda = 3 - 4\mu = -1$. Como ademais $-1 - 2\lambda = -2 + 3\mu = 1$, conclúese que **r e s córtanse no punto $P(3 + 2\lambda, -\lambda, -1 - 2\lambda) = P(1, 1, 1)$.**

Solución alternativa:

$\vec{d}_r(2, -1, -2)$ e $\vec{d}_s(1, 4, 3)$ son vectores directores de r e s , respectivamente. Como $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4}$, r e s non son paralelas nin coincidentes. Consecuentemente, ou ben se cruzan, ou ben se cortan.

$$P(3, 0, -1) \in r, \quad Q(0, -3, -2) \in s, \quad \overrightarrow{PQ}(-3, -3, -1).$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 9 + 6 - 24 + 18 - 1 = 0$, de xeito que $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ e $\overrightarrow{PQ}$ son coplanares e polo tanto as rectas **r e s córtanse.**

Para calcular o punto de corte, téñense en conta as ecuacións paramétricas

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -1 - 2\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -3 + 4\mu, \\ z = -2 + 3\mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R},$$

e se resolve o sistema lineal $\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu, \\ -\lambda = -3 + 4\mu. \end{cases}$ Basta ver que $\mu = 1$, por exemplo como se fixo arriba (non é necesario calcular λ), de onde se infire que **o punto de corte é $P(\mu, -3 + 4\mu, -2 + 3\mu) = P(1, 1, 1)$.**

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

7. Estatística e Probabilidade:

Seleccionáanse 250 pacientes para estudar a eficacia dun novo medicamento. A 150 deles adminístraselles o medicamento, mentres que o resto son tratados cun placebo. Sabendo que se curaron o 80% dos que tomaron o medicamento, cal é a probabilidade de que, seleccionado un paciente ao azar, tomase o placebo ou non curase?

Solución:

Se M = “tomar o medicamento” e C = “curarse”, tense a seguinte táboa de continxencia:

	M	$\bar{M}$	
C	$150 \times 0.8 = 120$		
$\bar{C}$	30		
	150	100	250

A probabilidade pedida é $P(\bar{M} \cup \bar{C}) = \frac{100+30}{250} = \frac{130}{250} = \frac{13}{25} = 0.52$.

Solución alternativa:

Se M = “tomar o medicamento” e C = “curarse”, sábese que $P(M) = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$ e que $P(C|M) = 0.8 = \frac{4}{5}$. Sábese tamén que $P(C|M) = \frac{P(M \cap C)}{P(M)}$ e que, en virtude dunha das leis de De Morgan, $\bar{M} \cup \bar{C} = \overline{M \cap C}$. Así pois, a probabilidade pedida é

$$P(\bar{M} \cup \bar{C}) = P(\overline{M \cap C}) = 1 - P(M \cap C) = 1 - P(M)P(C|M) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25} = 0.52.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

8. Estatística e Probabilidade:

Nunha cadea de montaxe, o tempo empregado para realizar un determinado traballo segue unha distribución normal de media 20 minutos e desviación típica 4 minutos. Calcule a probabilidade de que se faga ese traballo nun tempo comprendido entre 16 e 26 minutos.

Solución:

Sexa X = “tempo, en minutos, empregado para realizar o traballo”.

$$X \rightarrow N(20,4) \Rightarrow Z = \frac{X - 20}{4} \rightarrow N(0,1).$$

Logo

$$P(16 \leq X \leq 26) = P\left(-\frac{4}{4} \leq Z \leq \frac{6}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1).$$

Como $P(Z \leq 1.5) \approx 0.9332$ e $P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$, a probabilidade pedida é

$$P(16 \leq X \leq 26) \approx 0.9332 - 0.1587 = 0.7745.$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só se corruxirán as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese:

a) Despexar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas.

b) Resolvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m+3)x + my = 3m+6. \end{cases}$$

3. Análise:

Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{se } x < 0, \\ bx & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

4. Análise:

a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{se } x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1} dx$.

5. Xeometría:

Sexan r a recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ e $\pi: -2x + y + z = 0$. Pídese a posición relativa de r e π . En caso de que se corten, achar o punto de corte.

6. Xeometría:

a) Calcule k sabendo que os vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ e $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa por $P(1,0,0)$ e contén a $r: x-1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

7. Estatística e Probabilidade:

O 57% dos estudantes matriculados na Universidade de Cambridge son naturais do Reino Unido e, de entre todos eses, o 83% aproban con honores. Ademais, a porcentaxe global de aprobados con honores é do 80%. Calcular a probabilidade de que un estudante elixido ao azar non nacece no Reino Unido sabendo que aprobou con honores.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha determinada poboación de árbores, o 20% teñen máis de 30 anos. Se se elixen 40 árbores ao azar, calcule a probabilidade de que soamente 4 deles teñan máis de 30 anos. O número total de árbores é tan grande que se pode asumir elección con substitución.

b) Se X segue unha distribución normal de media 15 e $P(X \leq 18) = 0.6915$, cal é a desviación típica?

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, solo se corregirán las 5 primeras respondidas.

1. Números y Álgebra:

Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m+3)x + my = 3m+6. \end{cases}$$

3. Análisis:

Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{si } x < 0, \\ bx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

4. Análisis:

a) Calcule el área de la región encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{si } x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1} dx$.

5. Geometría:

Sean r la recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ y $\pi: -2x + y + z = 0$. Se pide la posición relativa de r y π . En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

6. Geometría:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por $P(1,0,0)$ y contiene a $r: x-1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

7. Estadística y Probabilidad:

El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

8. Estadística y Probabilidad:

a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.

b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18) = 0.6915$, ¿cuál es la desviación típica?

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, e pode haber outras formas correctas de solucionarlos.

1. **Números e Álgebra** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.5 puntos por despexar X e 0.5 puntos polas dimensións.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos por cálculos previos e 0.5 puntos pola obtención de X aplicando a fórmula obtida no apartado anterior.
2. **Números e Álgebra** (2 puntos): 0.5 puntos por cada un dos catro casos que se presentan.
3. **Análise** (2 puntos): 1 punto pola continuidade e 1 punto pola derivabilidade.
4. **Análise** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.5 puntos pola formulación do problema e 0.5 puntos por chegar ao resultado.
 - b) 1 punto.
5. **Xeometría** (2 puntos): 1 punto pola posición relativa e 1 punto polo punto de corte.
6. **Xeometría** (2 puntos)
 - a) 1 punto.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan o plano e 0.5 puntos pola ecuación.
7. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos): 1 punto pola táboa de continxencia e 1 punto polo cálculo da probabilidade.
8. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)
 - a) 1 punto.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos por chegar a $P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.6915$ e 0.5 puntos pola determinación de σ .

www.yoquieroaprobar.es

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

1. Números e Álgebra:

Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese:

a) Despexar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas.

b) Resolvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución:

1.a) En primeiro lugar, despéxase X :

$$A^2X + AB = B \Leftrightarrow A^2X = B - AB \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1}(B - AB).$$

É certo tamén que $X = (A^{-1})^2(B - AB)$, xa que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Analízanse agora as dimensións: do esquema

$$\begin{matrix} \underline{A^2} & \underline{X} & + & \underline{A} & \underline{B} & = & \underline{B} \\ 4 \times 4 & p \times q & & 4 \times 4 & r \times 3 & & r \times 3 \end{matrix}$$

dedúcese que $p = r = 4$ e que $q = 3$, conque X e B deben ter dimensión 4×3 .

1.b)

- **Cálculo de $(A^2)^{-1}$:** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\det A^2 = 10 - 9 = 1$.

$$\text{Logo } (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Cálculo de $B - AB$:** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, de onde

$$B - AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- **Cálculo de X :**

$$X = (A^2)^{-1}(B - AB) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS**

Solución alternativa a 1.b):

Dado que $B = -A$, tense $X = (A^2)^{-1}(B - AB) = (A^2)^{-1}(-A + A^2) = -A^{-1} + I$. Agora, como $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1$, a inversa de A vén dada por $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e entón

$$X = -A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m+3)x + my = 3m+6. \end{cases}$$

Solución:

A notación F_i indicará "fila i ". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ 0 & m^2+m & 6 \end{array} \right).$$

Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro:

$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m^2+m)y = 6, \end{cases}$$

para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión. Hai que notar que $m^2 + m = m(m+1) = 0$ se, e só se, $m \in \{-1, 0\}$ e que $m+3 = 0$ se, e só se, $m = -3$. Consequentemente:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$y = \frac{6}{m^2+m}, \quad x = \frac{3m+m^2y}{m+3}.$$

- Se $m = -3$, o sistema triangular redúcese a $\begin{cases} -9y = -9, \\ 6y = 6, \end{cases}$ e é por tanto compatible indeterminado (ten infinitas solucións), porque calquera par $\begin{cases} x = \lambda, \\ y = 1, \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, é solución.
- Se $m \in \{-1, 0\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a segunda ecuación queda $0 = 6$.

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

Solución alternativa:

Sexan $A = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{pmatrix}$ e $A^* = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{pmatrix}$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $m+3$ e m non se anulan á vez, cúmprese que $1 \leq \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 2$ e tamén, conseguintemente, que $\text{rank } A = 1$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m + m^3 + 3m^2 = m^3 + 4m^2 + 3m = m(m^2 + 4m + 3) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow m \in \{-3, -1, 0\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 2 = n^\circ$ de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- **Caso $m = -3$:** $\text{rank } A = 1$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, co cal tamén $\text{rank } A^* = 1$. Ao ser $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 1 < n^\circ$ de incógnitas, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).
- **Caso $m = -1$:** $\text{rank } A = 1$ e $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, sábese que $\text{rank } A^* = 2 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).
- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 1$ e $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, sábese que $\text{rank } A^* = 2 > \text{rank } A$, situación na que, de novo, o sistema é incompatible (non ten solución).

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

3. Análise:

Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{se } x < 0, \\ bx & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

Solución:

A función f é derivable, e por tanto continua, en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ para valores calquera de a e b ; só hai que facer entón o estudo no punto $x = 0$. Debido a que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a-\cos x}{x}$ non é finito cando $a \neq 1$, f non pode ser continua neses casos. Fixemos pois $a = 1$ e consideremos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{se } x < 0, \\ bx & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- **Continuidade:** nótese que $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0$ (onde se usou a regra de L'Hôpital), e, para calquera valor de $b \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} bx = 0$. Por conseguinte, f é continua en $x = 0$ se, e soamente se, $(a, b) \in \{1\} \times \mathbb{R}$.
- **Derivabilidade:** séguese a asumir que $a = 1$, co cal f é continua (se non é continua, non pode ser derivable). Temos polo tanto que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2} & \text{se } x < 0, \\ b & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como f é continua, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x + x \cos x - \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou a regra de L'Hôpital) e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} b = b$, a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):

Sabemos que $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{se } x < 0, \\ bx & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$ xa que a ten que valer 1. Agora, como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou dúas veces a regra de L'Hôpital) e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx}{x} = b$, conclúese que a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

MATEMÁTICAS II

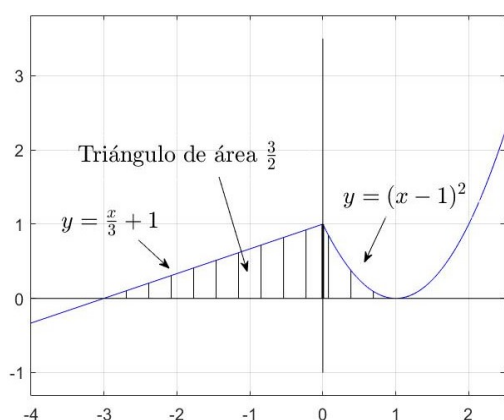
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

4. Análise:

- a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{se } x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$
- b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1} dx$.

Solución:

4.a)



Tendo en conta que $y = \frac{x}{3} + 1$ é a recta que pasa por $(-3, 0)$ e por $(0, 1)$ e que $y = (x-1)^2$ é a parábola de vértice $(1, 0)$ que pasa polos puntos $(0, 1)$ e $(2, 1)$, chégase ao debuxo da esquerda, onde está raiada a rexión cuxa área se pide.

Agora é claro que esa área virá dada por

$$A = \frac{3}{2} + \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{3}{2} + \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9+2}{6} = \frac{11}{6} u^2 = 1.8\bar{3} u^2,$$

onde u indica “unidade de lonxitude”.

4.b) Mediante o cambio de variable

$$z = x^2 - 1, \quad dz = 2x dx,$$

obtense

$$\int x\sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{z} dz = \frac{1}{2} \frac{z^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{z^3} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2-1)^3} + C.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

5. Xeometría:

Sexan r a recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ e $\pi: -2x + y + z = 0$. Pídese a posición relativa de r e π . En caso de que se corten, achar o punto de corte.

Solución:

O vector $\vec{n}_\pi(-2,1,1)$ é normal ao plano π . Como $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = -2 + 3 = 1 \neq 0$, os vectores $\vec{d}_r$ e $\vec{n}_\pi$ non son perpendiculares, e polo tanto **r e π córtanse nun punto.**

As ecuacións paramétricas de r son

$$r: \begin{cases} x=1+\lambda, \\ y=0, \\ z=3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Substituíndo na ecuación do plano obtense o valor de λ que proporcionará o punto de corte:

$$-2(1+\lambda) + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow -2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Téñense así os valores seguintes:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda = 3, \\ y &= 0, \\ z &= 3\lambda = 6, \end{aligned}$$

é dicir, **r e π córtanse no punto $Q(3,0,6)$.**

**MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN**

6. Xeometría:

a) Calcule k sabendo que os vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ e $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa por $P(1,0,0)$ e contén a $r: x-1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

Solución:

6.a) Ao ser coplanarios, son linealmente dependentes, de xeito que o valor de k pode ser calculado como segue:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

6.b) $Q(1,0,-1) \in r$ e $\vec{d}_r(1,-4,3)$ é vector director de r . O plano π pasa por $P(1,0,0)$ e está xerado por $\vec{d}_r(1,-4,3)$ e $\overrightarrow{PQ}(0,0,-1)$, é dicir,

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: 4x - 4 + y = 0 \Leftrightarrow \pi: 4x + y - 4 = 0.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

7. Estatística e Probabilidade:

O 57% dos estudantes matriculados na Universidade de Cambridge son naturais do Reino Unido e, de entre todos eses, o 83% aproban con honores. Ademais, a porcentaxe global de aprobados con honores é do 80%. Calcular a probabilidade de que un estudante elixido ao azar non nacese no Reino Unido sabendo que aprobou con honores.

Solución:

Se RU = “ser natural do Reino Unido” e AH = “aprobar con honores”, tense a seguinte táboa de continxencia:

	AH	$\overline{AH}$	
RU	$57 \times 0.83 = 47.31$		$100 \times 0.57 = 57$
$\overline{RU}$	32.69		
	$100 \times 0.80 = 80$		100

A probabilidade pedida é polo tanto $P(\overline{RU}|AH) = \frac{32.69}{80} = 0.408625$.

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha determinada poboación de árbores, o 20% teñen máis de 30 anos. Se se elixen 40 árbores ao azar, calcule a probabilidade de que soamente 4 deles teñan máis de 30 anos. O número total de árbores é tan grande que se pode asumir elección con substitución.

b) Se X segue unha distribución normal de media 15 e $P(X \leq 18) = 0.6915$, cal é a desviación típica?

Solución:

Sexa $X =$ “número de árbores de máis de 30 anos, de entre os 40”.

$$X \rightarrow B(n, p), \text{ con } n = 40 \text{ e } p = 0.2.$$

Logo $q = 1 - p = 0.8$, co que a probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \binom{40}{4} p^4 q^{36} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (0.2)^4 (0.8)^{36} = 10 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot (0.2)^4 (0.8)^{36} \\ &= 91300 \cdot (0.2)^4 (0.8)^{36} \approx 0.0475. \end{aligned}$$

8.b)

$$X \rightarrow N(15, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - 15}{\sigma} \rightarrow N(0,1).$$

Polo tanto,

$$P(X \leq 18) = 0.6915 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{18 - 15}{\sigma}\right) = 0.6915 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.6915.$$

Indo agora á táboa da distribución $N(0,1)$, vese que $\frac{3}{\sigma} \approx 0.5$, de onde $\sigma \approx \frac{3}{0.5} = 6$.