

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

- 1.a) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula os valores de m para que a matriz inversa de M sexa $\frac{1}{4}M$.
b) Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula a matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, sendo B^t e C^t as traspostas de B e C respectivamente.
- 2.a) Calcula: intervalos de crecemento e decrecemento e máximos e mínimos relativos de $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.
b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = x^2 - 4x$ e a recta $y = x - 4$. (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes, o vértice e concavidade ou convexidade).
3. a) Determina o valor de λ para que os puntos $A(3,0,-1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,-2,-5)$ e $D(\lambda,6,-1)$ sexan coplanarios e calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que os contén.
b) Determina a posición relativa do plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ e a recta r que pasa polos puntos $P(-4,4,2)$ e $Q(4,8,-4)$. Se se cortan, calcula o punto de corte.
c) Calcula o punto simétrico do punto $P(-4,4,2)$ respecto do plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.
4. Nas rebaixas duns grandes almacéns están mesturadas e á venda 200 bufandas da marca A, 150 da marca B e 50 da marca C. A probabilidade de que unha bufanda da marca A sexa defectuosa é 0,01; 0,02 se é da marca B e 0,04 se é da marca C. Unha persoa elixe unha bufanda ao azar.
a) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida sexa da marca A ou defectuosa.
b) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida non sexa defectuosa nin da marca C.
c) Se a bufanda elixida non é defectuosa, cal é a probabilidade de que sexa da marca B?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:
$$\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 3$.
2. a) Calcula a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sexa continua e derivable en $x = 0$.
b) Calcula os vértices do rectángulo de área máxima que se pode construír, se un dos vértices é o $(0,0)$, outro está sobre o eixe X , outro sobre el eixe Y e o outro sobre a recta $2x + 3y = 8$.
c) Calcula $\int_0^3 x\sqrt{x+1} \, dx$.
3. a) Dado o plano $\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula o valor de a para que a recta r que pasa polos puntos $P(a,a,a)$ e $Q(1,3,0)$ sexa paralela ao plano π .
b) Para $a = 1$, calcula a distancia de r a π .
c) Para $a = 1$, calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a π e contén a r .
4. a) Un exame tipo test consta de 10 preguntas, cada unha con 4 respostas das cales só unha é correcta. Se se contesta ao azar, cal é a probabilidade de contestar ben polo menos dúas preguntas?
b) A duración dun certo tipo de pilas eléctricas é unha variable que segue unha distribución normal de media 50 horas e desviación típica 5 horas. Calcula a probabilidade de que unha pila eléctrica deste tipo, elixida ao azar, dure menos de 42 horas.

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
 - a) Que relación existe entre a súa inversa A^{-1} e a súa trasposta A^t ?
 - b) Estuda, segundo os valores de λ , o rango de $A - \lambda I$, sendo I a matriz identidade de orde 3. Calcula as matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. a) Enuncia o teorema de Rolle. Calcula a , b e c para que a función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{se } x < 1 \\ bx + c & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ cumpra as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[0,2]$ e calcula o punto no que se cumpre o teorema.
b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = x^2 - 2x$ e a recta $y = x$. (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes de coordenadas, o vértice e concavidade ou convexidade).
3. Dada a recta $r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$
 - a) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polo punto $A(1,1,1)$ e é perpendicular a r .
 - b) Calcula a ecuación implícita o xeral do plano que pasa polos puntos $P(-1,0,6)$ e $Q(3,-2,4)$ e é paralelo á recta r .
 - c) Calcula a distancia da recta r ao plano $x + y + z - 5 = 0$.
4. Nun bombo temos 10 bolas idénticas numeradas do 0 ao 9 e cada vez que facemos una extracción devolvemos a bola ao bombo
 - a) Se facemos 5 extraccións, calcula a probabilidade de que o 7 saia menos de dúas veces.
 - b) Se facemos 100 extraccións, calcula a probabilidade de que o 7 saia menos de nove veces.

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións: $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$
b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.
2. a) Calcula, se existe, o valor de m para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\sin(x^2)} = 3$
b) Calcula os valores de a, b, c e d para que a función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ teña un punto de inflexión no punto $(0,5)$ e a tanxente á súa gráfica no punto $(1,1)$ sexa paralela ao eixe X .
c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$ (Nota: $\ln = \text{logaritmo neperiano}$)
3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(9,4,1)$ e $Q(1,1,1)$. Dada a recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$
 - a) Estuda a posición relativa das rectas r e s . Calcula, se se cortan, o punto de corte.
 - b) Calcula, se existe, a ecuación implícita ou xeral do plano que contén as rectas r e s .
 - c) Calcula a distancia do punto $O(0,0,0)$ á recta s .
4. Nunha fábrica hai tres máquinas A, B e C que producen a mesma cantidade de pezas. A máquina A produce un 2% de pezas defectuosas, a B un 4% e a C un 5%.
 - a) Calcula a probabilidade de que unha peza elixida ao azar sexa defectuosa.
 - b) Se se elixe unha peza ao azar e resulta que non é defectuosa, cal é a probabilidade de que fora fabricada pola máquina A?

ABAU
CONVOCATORIA DE XUÑO
Ano 2018
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1,5 puntos

- 0,75 puntos pola determinación do máximo relativo.
- 0,75 puntos pola determinación dos intervalos de crecemento e decrecemento.

b) 1,5 puntos

- 0,75 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,75 puntos pola formulación e cálculo da área coma unha integral definida.

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación de λ .
- 0,5 puntos pola ecuación do plano.

b) 1 punto

- 0,5 puntos pola posición relativa do plano e a recta.
- 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

c) 1 punto

4) a) 0,75 puntos

b) 0,5 puntos

c) 0,75 puntos

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1 punto:

➤ 0,5 puntos pola continuidade.

➤ 0,5 puntos pola derivabilidade.

b) 1 punto

c) 1 punto

3) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto

b) 1 punto

ABAU
CONVOCATORIA DE SETEMBRO
Ano 2018
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 0,5 puntos

b) 1,5 puntos

- 0,5 puntos pola determinación do rango de $A - \lambda I$, segundo os valores de λ .
- 1 punto pola determinación das matrices X .

2) a) 1,5 puntos

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
- 0,5 puntos pola determinación de a, b e c .
- 0,5 puntos pola determinación do punto no que se cumpre o teorema de Rolle.

b) 1,5 puntos

- 0,5 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

3) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto

b) 1 punto

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo estudo da posición relativa das rectas.
- 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto

b) 1 punto

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $|M| = \begin{vmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - m - 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$

$$M^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -m-4 & m \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{m}{4} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4} M = \begin{pmatrix} \frac{m}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{m = -1}$$

Outra forma de resolvelo:

$$M^{-1} = \frac{1}{4} M \Leftrightarrow \frac{1}{4} M \cdot M = I \Leftrightarrow M^2 = 4I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m^2 + m + 4 & m^2 + 5m + 4 \\ m + 1 & m + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

E polo tanto

$$\boxed{m = -1}$$

b) $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X \Leftrightarrow (B^t \cdot A - I)X = -C^t$

$$B^t \cdot A - I = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B^t \cdot A - I| = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists (B^t \cdot A - I)^{-1}$$

$$(B^t \cdot A - I)^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Entón:

$$X = -(B^t \cdot A - I)^{-1} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$$

Outra forma:

$$(B^t \cdot A - I)X = -C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 3z = -4 \\ -y = 2 \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -4/3 \\ y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

E así: $X = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Polo tanto, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{2x - x^2}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-x^3 - 3x^2(2-x)}{x^6} = \frac{-x - 3(2-x)}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ f''(2) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Máximo relativo en } x = 2}$$

Para estudar o crecemento e decrecemento, podemos facer a seguinte táboa (temos un máximo relativo en $x = 2$ e o 0 non está no dominio da función):

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
$f(x)$			

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{Crecente en } (0, 2) \\ \text{Decrecente en } (-\infty, 0) \text{ e en } (2, \infty) \end{array}}$

b) Estudo da parábola:

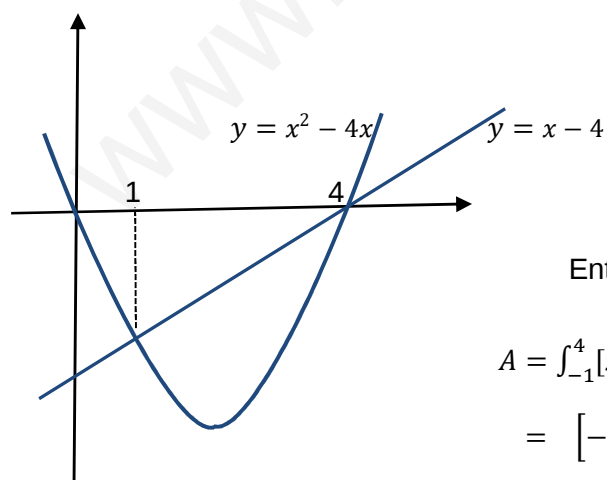
$y = x^2 - 4x = x(x - 4) \Rightarrow$ Puntos de corte cos eixes: $(0, 0)$ e $(4, 0)$

$y' = 2x - 4 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$ Vértice: $(2, -4)$.

$y'' = 2 \Rightarrow$ Convexa.

Puntos de corte da recta e a parábola:

$$x^2 - 4x = x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \Rightarrow (1, -3), (4, 0)$$



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^4 [x - 4 - (x^2 - 4x)] dx = \int_{-1}^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_{-1}^4 = -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{9}{2} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

- a) Os vectores $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-2, -2, -4)$ non son proporcionais. Polo tanto, os puntos A , B e C non están aliñados e determinan un plano π (o punto $A \in \pi$ e os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinan π)

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8(x-3) - 4y + 6(z+1) = 0$$

$$\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$$

Para determinar λ , impoñemos que $D \in \pi$:

$$4\lambda + 12 + 3 - 15 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Tamén poderíamos determinar λ coa condición $\text{rang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 2$

- b) O vector director da recta r e o vector normal ao plano π son:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (8, 4, -6) \\ \vec{n}_\pi = (4, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi \Rightarrow \boxed{r \text{ e } \pi \text{ córtanse (son perpendiculares)}}$$

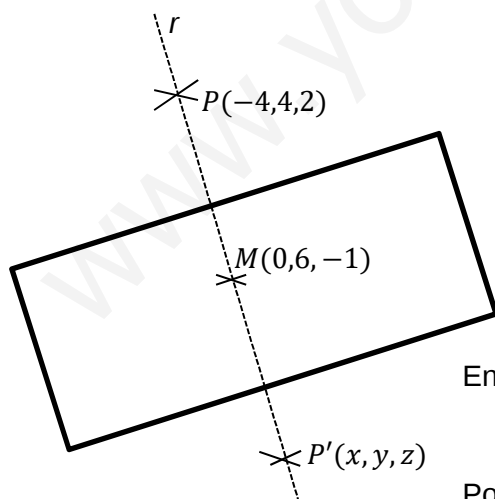
Para determinar o punto de corte da recta e o plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta ($P \in r$, $\vec{v}_r$ é un vector director) e substituímos na ecuación do plano

$$r: \begin{cases} x = -4 + 8\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 2 - 6\lambda \end{cases} \Rightarrow -16 + 32\lambda + 8 + 8\lambda - 6 + 18\lambda - 15 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2$$

Substituíndo este valor de λ nas ecuacións paramétricas, obtemos o punto de corte da recta e o plano

$$\boxed{M(0, 6, -1)}$$

c)



Temos que:

M é o punto de corte de r e π
 $P(-4, 4, 2)$ é un punto de r
 r é perpendicular a π

Entón M é o punto medio de P e o seu simétrico $P'(x, y, z)$

Polo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \frac{x-4}{2} \\ 6 = \frac{y+4}{2} \\ -1 = \frac{z+2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P'(4, 8, -4)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) Sexan:

A = "A bufanda é da marca A"

B = "A bufanda é da marca B"

C = "A bufanda é da marca C"

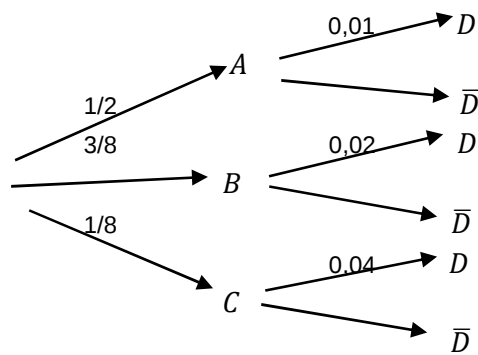
D = "A bufanda é defectuosa"

Entón temos:

$$P(A) = \frac{200}{200+150+50} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad P(B) = \frac{150}{200+150+50} = \frac{3}{8} = 0,375; \quad P(C) = \frac{50}{200+150+50} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$P(D/A) = 0,01; \quad P(D/B) = 0,02; \quad P(D/C) = 0,04$$

Podemos facer o seguinte diagrama en árbore:



a) Pola fórmula da probabilidade total, podemos calcular a probabilidade de que unha bufanda, elixida ao azar, sexa defectuosa:

$$P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C) = 0,01 \cdot 0,5 + 0,02 \cdot 0,375 + 0,04 \cdot 0,125 = 0,0175$$

E a probabilidade de que unha bufanda, elixida ao azar, sexa da marca A ou defectuosa será:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = 0,5 + 0,0175 - 0,5 \cdot 0,01 = \boxed{0,5125}$$

b) Para calcular a probabilidade de que unha bufanda, elixida ao azar, non sexa defectuosa nin da marca C usamos as leis de Morgan

$$\begin{aligned} P(\bar{D} \cap \bar{C}) &= P(\overline{D \cup C}) = 1 - P(D \cup C) = 1 - [P(D) + P(C) - P(D \cap C)] \\ &= 1 - 0,0175 - 0,125 + 0,04 \cdot 0,125 = \boxed{0,8625} \end{aligned}$$

c) Se sabemos que a bufanda non é defectuosa, queremos calcular a probabilidade de que sexa da marca B

$$P(B/\bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(B \cap \bar{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,98 \cdot 0,375}{1 - 0,0175} = \boxed{0,374}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m - 6 + 2m - 3 = 3m - 9 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{cases} \text{rang}(C) = 2 \text{ se } m = 3 \\ \text{rang}(C) = 3 \text{ se } m \neq 3 \end{cases}$$

Cálculo do rango da matriz ampliada (lembramos que sempre $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$):

- $m \neq 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$ (neste caso $\text{rang}(C) = 3$)
- $m = 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$ (se $m = 3$, 1ª ecuación = 3*2ª ecuación e $\text{rang}(C) = 2$)

Discusión:

$m = 3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^{\circ} \text{ incógnitas. Sistema compatible indeterminado.}$
 $m \neq 3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^{\circ} \text{ incógnitas. Sistema compatible determinado.}$

b) Para $m = 3$ xa vimos que era un sistema compatible indeterminado (infinitas solucións).

Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -z \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{cases} 3y = z + 3 \Rightarrow y = \frac{z}{3} + 1 \\ 3x = -z + 6 \Rightarrow x = -\frac{z}{3} + 2 \end{cases}$$

As infinitas solucións son

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\lambda}{3} + 2 \\ y &= \frac{\lambda}{3} + 1; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

Tamén poderíamos resolver o exercicio polo método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{array} \right) \begin{array}{l} (1^a) - 3*(2^a) \\ (2^a) \\ (3^a) - (2^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & m \end{array} \right)$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Se $m = 3$ suprimise a primeira fila (queda unha fila de 0) e o sistema é compatible indeterminado

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -z \\ 3y = 3 + z \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = -z + 2\left(1 + \frac{z}{3}\right) = 2 - z/3 \\ y = 1 + \frac{z}{3} \end{array}$$

as infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 - \frac{\lambda}{3} \\ y = 1 + \frac{\lambda}{3}; \\ z = \lambda \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

se $m \neq 3$ o sistema é compatible determinado. Para cada valor de m , temos un sistema distinto con solución única.

Exercicio 2:

a) Para que a función sexa continua en $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{2x} + ax + b) = 1 + b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}(x^2 + 2)\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + b = 1 \Rightarrow b = 0$$

Por outra parte

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (2e^{2x} + a) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{aligned}$$

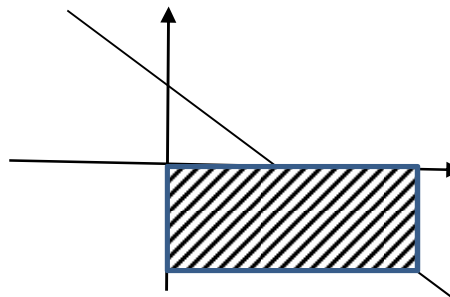
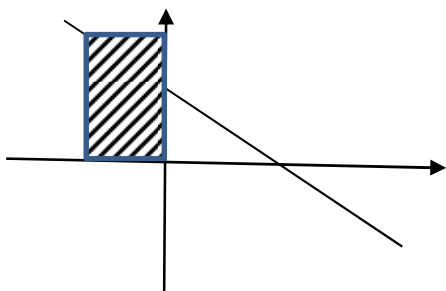
Polo tanto, para que a función sexa derivable en $x = 0$, debe cumprirse:

$$\left. \begin{array}{l} b = 0 \\ 2 + a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -2; b = 0}$$

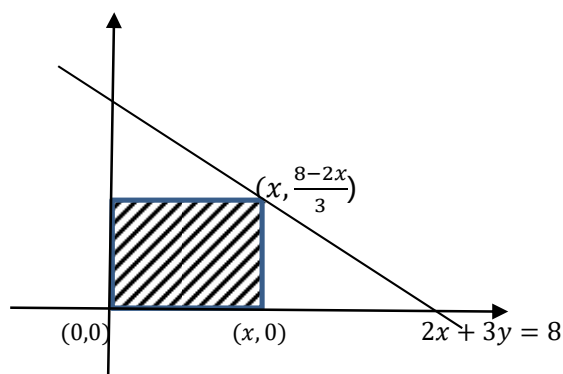
Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

b) A área non está acotada se o rectángulo está situado no segundo ou cuarto cuadrante



Se o rectángulo está situado no primeiro cuadrante:



Función a maximizar (área do rectángulo):

$$A(x) = \frac{x(8-2x)}{3} = \frac{8x-2x^2}{3}$$

Determinamos os puntos críticos:

$$A'(x) = \frac{1}{3}(8-4x)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$A''(x) = -4/3$$

$\Rightarrow$ máximo en $x = 2$

Polo tanto:

$$\boxed{\text{Vértices: } (0,0), (2,0), (0,4/3), (2,4/3)}$$

c) Calculamos a integral indefinida utilizando o cambio de variable: $x+1 = t^2$; $dx = 2tdt$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1} dx &= \int (t^2-1) \cdot 2t^2 dt = \int (2t^4 - 2t^2) dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + k = \\ &= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + k \end{aligned}$$

E calculamos a integral definida aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

Tamén poderíamos calcular a integral indefinida polo método de integración por partes:

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + k$$

E aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} \right]_0^3 = \frac{48}{3} - \frac{128}{15} + \frac{4}{15} = \frac{240}{15} - \frac{124}{15} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) A recta que pasa polos puntos P e Q ten como vector director:

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1-a, 3-a, -a)$$

Por outra parte, un vector normal ao plano é:

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, -2).$$

Entón

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow 2(1-a) - (3-a) + 2a = 0 \Leftrightarrow 2 - 2a - 3 + a + 2a = 0$$

$$\boxed{a = 1}$$

b) Polo apartado anterior, sabemos que se $a = 1$, a recta e o plano son paralelos, polo tanto a distancia entre a recta e o plano é igual á distancia entre un punto da recta (por exemplo P) e o plano

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 - 1 - 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \boxed{4/3 \text{ u}}$$

c) Sexa α o plano buscado. O plano α está determinado polos elementos seguintes

$$P(1,1,1) \in r \Rightarrow P(1,1,1) \in \alpha$$

$$\vec{v}_r = (0, 2, -1)$$

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, -2)$$

Son vectores contidos no plano α

Polo tanto:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow -5(x-1) - 2(y-1) - 4(z-1) = 0$$
$$\Rightarrow -5x - 2y - 4z + 11 = 0$$

$$\boxed{\alpha : 5x + 2y + 4z - 11 = 0}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

- a) Sexa $X = \text{n}^\circ$ de respostas acertadas. Trátase dunha distribución binomial $B(10; 0,25)$, pois a probabilidade de contestar ben unha pregunta é a mesma nos dez casos: 0,25

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^9 = 1 - 0,0563 - 0,1877 \\ &= \boxed{0,756} \end{aligned}$$

- b) Sea X la duración, en horas, de las pilas. X sigue una distribución normal $N(50; 5)$

$$\begin{array}{ccc} \text{Tipificación} & \frac{X-50}{5} = Z \longrightarrow & N(0,1) \\ \downarrow & \swarrow & \\ P(X < 42) = P\left(\frac{X-50}{5} < \frac{42-50}{5}\right) & = P(Z < -1,6) = P(Z > 1,6) = 1 - P(Z \leq 1,6) \\ & = 1 - 0,9452 = \boxed{0,0548} \end{array}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^t \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{A^t = A^{-1}}$$

Tamén poderíamos calcular A^{-1} utilizando Gauss: no primeiro paso intercambiamos a primeira e a segunda fila. No segundo paso intercambiamos a segunda e terceira fila e finalmente cambiamos de signo a tódalas filas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e vemos que } \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t}$$

Tamén se podería calcular A^{-1} utilizando determinantes:

$$|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t$$

b)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1$$

$$\text{Polo tanto: } |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 1 = 0.$$

$\lambda = -1$ é unha solución da ecuación $\lambda^3 + 1 = 0$. Como $\lambda^3 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$ e $\lambda^2 - \lambda + 1$ non ten solucións reais, temos

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Se } \lambda = -1, & \quad \text{entón } \text{rang}(A - \lambda I) = 2 \\ \text{Se } \lambda \neq -1, & \quad \text{entón } \text{rang}(A - \lambda I) = 3 \end{aligned}}$$

$$AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e vimos que } A + I \text{ non ten inversa. Entón:}$$

$$(A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{x = y = z\}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) e con $f(a) = f(b)$ entón existe polo menos un punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

Se $x \neq 1$, $f(x)$ é continua e derivable pois son funcións polinómicas,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = b + c \\ f(1) = b + c \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Para que sexa continua en } x = 1 \\ 2 + a = b + c \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Para que coincidan as derivadas laterais} \\ 4 + a = b \end{array}$$

$$f(0) = f(2) \Rightarrow 0 = 2b + c$$

Polo tanto, para que se cumpran as hipóteses do teorema de Rolle,

$$\left. \begin{array}{l} a - b - c = -2 \\ a - b = -4 \\ 2b + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{c = -2; b = 1; a = -3}$$

$$\text{Para estes valores, } f'(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Entón } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 4\xi - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi = 3/4}$$

b) Estudo da parábola:

$$y = x^2 - 2x = x(x - 2) \Rightarrow \text{Puntos de corte cos eixes: } (0,0) \text{ e } (2,0)$$

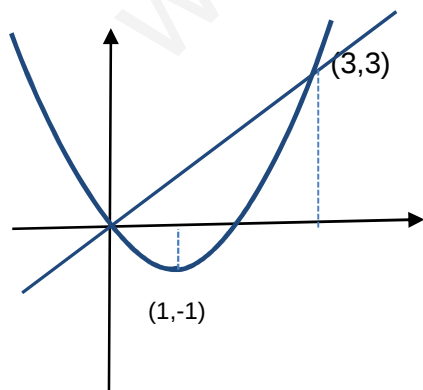
$$y' = 2x - 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Vértice: } (1, -1).$$

$$y'' = 2 \Rightarrow \text{Convexa.}$$

Puntos de corte da recta e a parábola:

$$x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 3. \text{ Córtanse nos puntos } (0,0) \text{ e } (3,3)$$

$y = x^2$ $y = x$



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 [x - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \\ &= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{9}{2} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Determinamos un vector director da recta r :

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2)$$

Como se pide un plano π_1 perpendicular á recta, entón $\vec{v}_r$ é un vector normal ao plano:

$$r \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_{\pi_1}$$

e π_1 queda determinado polo punto $A(1,1,1)$ polo que pasa e o vector normal $\vec{n}_{\pi_1} = (2, 0, -2)$

$$\pi_1: 2(x-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: x - z = 0}$$

b) Este novo plano, π_2 , queda determinado polos elementos:

- $P(-1, 0, 6)$ que é un punto pertencente ao plano
- $\overrightarrow{PQ} = (4, -2, -2)$ é un vector do plano
- $\vec{v}_r = (2, 0, -2)$ é un vector do plano

Temos entón:

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y & z-6 \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(x+1) + 4y + 4(z-6) = 0$$

$$\boxed{\pi_2: x + y + z - 5 = 0}$$

c) Pídenos calcular a distancia da recta r ao plano π_2 . Vimos no apartado anterior que son paralelos, polo tanto podemos calcular esa distancia como a distancia dun punto calquera da recta ao plano:

$$P_r(1, 0, 1) \in r$$
$$\downarrow$$
$$d(r, \pi_2) = d(P_r, \pi_2) = \frac{|1 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{d(r, \pi_2) = \sqrt{3} \text{ u}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

Sexa X = "nº de extraccións nas que obtemos un 7"

- a) Evidentemente trátase de probas independentes, nas que a probabilidade de éxito non cambia

$$\left. \begin{array}{l} \text{número de extraccións} = n = 5 \\ \text{probabilidade de éxito} = p = 0,1 \end{array} \right\} X \rightarrow Bi(5; 0,1)$$

$$P(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{5}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^4 = 0,5905 + 0,3281 = 0,9185$$

$$\boxed{P(X < 2) = 0,9185}$$

- b) Neste caso

$$X \rightarrow Bi(100; 0,1)$$

Pero como

$$n \cdot p = 10 > 5$$

$$n \cdot q = 90 > 5$$

aproximamos a binomial X pola normal X' con media $\mu = n \times p = 100 \times 0,1 = 10$ e

desviación típica $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{100 \times 0,1 \times 0,9} = 3$

$$X \rightarrow Bi(100; 0,1) ; \quad X' \rightarrow N(10; 3)$$

Ademais aplicamos a corrección de medio punto ou corrección de Yates. Así

$$\begin{array}{ccc} \text{Tipificación} & & Z = \frac{X' - 10}{3} \rightarrow N(0,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(X < 9) = P(X' \leq 8,5) = P\left(\frac{X' - 10}{3} \leq \frac{8,5 - 10}{3}\right) & = & P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5) \\ & = & 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085 \end{array}$$

$$\boxed{P(X < 9) = 0,3085}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

Dúas columnas proporcionais

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Cálculo do rango de A :

Sempre $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m - m - 2 = m - 1$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } m \neq 1 \\ 2 & \text{se } m = 1 \end{cases}$$

Discusión:

$m = 1$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.

$m \neq 1$, $\text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible.

b) Para $m = 1$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 + z \\ x = 1 + z \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

As infinitas solución son:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\sin(x^2)} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ (L'Hopital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin 2x + 2mx}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\cos 2x + 2m}{2x\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)} = \frac{-4 + 2m}{2}$$

Entón:

$$\frac{-4 + 2m}{2} = 3 \Rightarrow -4 + 2m = 6 \Rightarrow \boxed{m = 5}$$

b)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\text{Punto de inflexión no punto } (0,5): \begin{cases} f''(0) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0} \\ f(0) = 5 \Rightarrow \boxed{d = 5} \end{cases}$$

Entón $f(x) = ax^3 + cx + 5$. Ademais

$$\text{Pasa polo punto } (1,1): f(1) = 1 \Rightarrow a + c + 5 = 1$$

$$\text{Tanxente á gráfica de } f(x) \text{ no punto } (1,1) \text{ paralela ao eixe } X: f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + c = 0$$

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ a + c + 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3a \\ a - 3a + 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 2}; \boxed{c = -6}$$

c) Podemos calcular a integral indefinida utilizando primeiro o método de substitución e despois o método de integración por partes:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt && \text{desfacemos o cambio} \\ \int \sqrt{x} \ln x dx &= \int 4t^2 \ln t dt = \int \frac{4}{3} t^3 \ln t - \frac{4}{3} \int t^2 dt = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + k \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} u = \ln t \Rightarrow du = dt/t \\ dv = 4t^2 \Rightarrow v = \frac{4}{3} t^3 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

ou ben calculala directamente por partes:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \ln x dx &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + k \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = dx/x \\ dv = x^{1/2} dx \Rightarrow v = \frac{2}{3} x^{3/2} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Aplicando a regra de Barrow:

$$\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} \right]_1^e = \frac{2}{3} e^{3/2} - \frac{4}{9} e^{3/2} + \frac{4}{9}$$

$$\boxed{\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{9} e^{3/2} + \frac{4}{9}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a)

$$r: \begin{cases} P_r(9,4,1) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-8, -3, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P_s(1,0,5) \in s \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, -1) \end{cases}$$

Os vectores directores $\vec{v}_r = (-8, -3, 0)$ e $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, -1)$ das rectas non son proporcionais, polo tanto as rectas córtanse ou crúzanse. Para saber se se cortan ou se cruzan, calculamos o rango($\vec{P}_r, \vec{P}_s, \vec{v}_r, \vec{v}_s$):

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{As rectas córtanse}}$$

Para calcular o punto de corte pasamos ás ecuacións paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 9 - 8\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 5 - \mu \end{cases}$$

Entón:

$$\begin{cases} 9 - 8\lambda = 1 + 2\mu \\ 4 - 3\lambda = \mu \\ 1 = 5 - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 9 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Punto de corte } (9,4,1)}$$

b) Sexa π o plano buscado. O plano π está determinado por ($\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ non son proporcionais):

- O punto de corte das rectas (9,4,1) (π contén a r e a s)
- Un vector director $\vec{v}_r$ da recta r é un vector contido no plano (π contén á recta r)
- Un vector director $\vec{v}_s$ da recta s é un vector contido no plano (π contén á recta s)

$$\pi: \begin{vmatrix} x-9 & y-4 & z-1 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-9) - 8(y-4) - 2(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi: 3x - 8y - 2z - 28 + 7 = 0}$$

c) Utilizamos a fórmula da distancia dun punto a unha recta:

$$\overrightarrow{OP_s} = (1,0,5) \Rightarrow \overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 11, 1)$$

$$d(O, s) = \frac{|\overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{5^2 + 11^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{147}{6}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

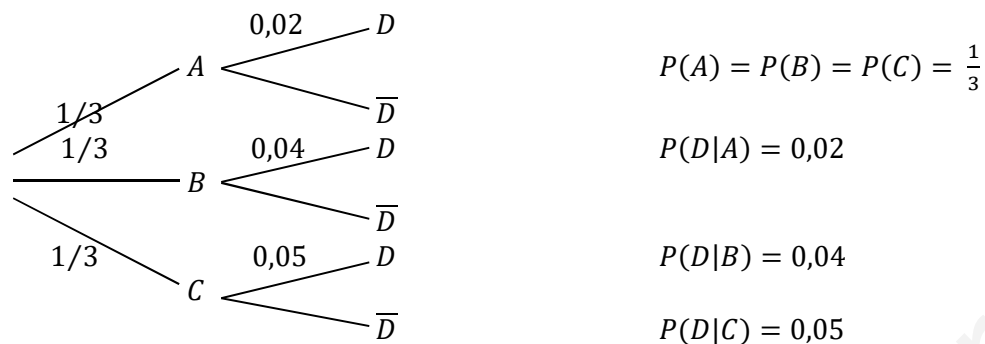
$$\boxed{d(O, s) = \frac{7\sqrt{2}}{2} u}$$

Exemplos de resposta / Soluciones

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

Podemos facer o seguinte diagrama en árbore (D =peza defectuosa):



a) Pola fórmula da probabilidade total:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0,02 \cdot \frac{1}{3} + 0,04 \cdot \frac{1}{3} + 0,05 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 0,11 \cdot \frac{1}{3} = 0,03667 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(D) = 0,03667}$$

b)

$$P(A|\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}|A) \cdot P(A)}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}|A) \cdot P(A)}{1 - P(D)} = \frac{(1 - 0,02) \cdot \frac{1}{3}}{1 - 0,03667} = 0,3391$$

$$\boxed{P(A|\bar{D}) = 0,3391}$$