

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
TEMA 6: TEORÍA DE MUESTRAS

- Junio, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Parte II, Opción B

Un fabricante de pilas alcalinas sabe que el tiempo de duración, en horas, de las pilas que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y varianza 3600. Con una muestra de su producción, elegida al azar, y un nivel de confianza del 95% ha obtenido para la media el intervalo de confianza (372.6; 392.2).

a) Calcule el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño muestral utilizado.

b) ¿Cuál sería el error de su estimación, si hubiese utilizado una muestra de tamaño 225 y un nivel de confianza del 86'9%?

SOCIALES II. 2004 JUNIO. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como el nivel de confianza es del 95%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

La media será: $\mu = \frac{372'6+392'2}{2} = 382'4$

Aplicando la fórmula del error calculamos el tamaño de la muestra.

$$E = 392'2 - 382'4 = 9'8 = 1'96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 144$$

b) Como el nivel de confianza es del 86'9%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'869}{2} = 0'9345 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'51$$

Aplicando la fórmula del error, tenemos que:

$$E = 1'51 \cdot \frac{60}{\sqrt{225}} = 6'04$$

El peso de los paquetes enviados por una determinada empresa de transportes se distribuye según una ley normal, con una desviación típica de 0'9 Kg. En un estudio realizado con una muestra aleatoria de 9 paquetes, se obtuvieron los siguientes pesos en Kilos:

9.5 ; 10 ; 8.5 ; 10.5 ; 12.5 ; 10.5 ; 12.5 ; 13 ; 12

a) Halle un intervalo de confianza, al 99%, para el peso medio de los paquetes enviados por esa empresa.

b) Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra, en el caso de admitir un error máximo de 0'3 Kg, con un nivel de confianza del 90%.

SOCIALES II. 2004 JUNIO. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$a) \frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(11 \pm 2'575 \frac{0'9}{\sqrt{9}} \right) = (11 \pm 0'7725) = (10'2275; 11'7725)$$

$$b) \frac{1+0'90}{2} = 0'95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'645$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 0'3 = 1'645 \cdot \frac{0'9}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 24'35 \approx 25$$

Una empresa de teléfonos móviles ha hecho un estudio sobre el tiempo que tardan sus baterías en descargarse, llegando a la conclusión de que dicha duración, en días, sigue una ley Normal de media 3.8 y desviación típica 1.

Se toma una muestra de 16 móviles de esta empresa. Halle la probabilidad de que:

a) La duración media de las baterías de la muestra esté comprendida entre 4.1 y 4.3 días.

b) La duración media de las baterías de la muestra sea inferior a 3.35 días.

SOCIALES II. 2004 RESERVA 1. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

La distribución de las medias muestrales es: $N\left(3'8; \frac{1}{\sqrt{16}}\right) = N(3'8; 0'25)$

a)

$$p(4'1 < x < 4'3) = p\left(\frac{4'1 - 3'8}{0'25} < z < \frac{4'3 - 3'8}{0'25}\right) = p(1'2 < z < 2) = p(z < 2) - p(z < 1'2) = \\ = 0'9772 - 0'8849 = 0'0923$$

b)

$$p(x < 3'35) = p\left(z < \frac{3'35 - 3'8}{0'25}\right) = p(z < -1'8) = 1 - p(z < 1'8) = 1 - 0'9641 = 0'0359$$

Se sabe que la velocidad de los coches que circulan por una carretera es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 12 km/hora.

a) Se toma una muestra aleatoria de 400 coches que da una velocidad media de 87 km/hora. Obtenga un intervalo con un 95% de confianza, para la velocidad media del total de coches que circulan por esa carretera.

b) Calcule el mínimo tamaño de la muestra que se ha de tomar para estimar la velocidad media del total de coches que circulan por esa carretera, con un error inferior a 1 km/hora para un nivel de confianza del 99%.

SOCIALES II. 2004 RESERVA 1. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(87 \pm 1'96 \frac{12}{\sqrt{400}} \right) = (87 \pm 1'176) = (85'824 ; 88'176)$$

b)

$$\frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 1 = 2'575 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 954'81 \approx 955$$

La superficie de las parcelas de una determinada provincia se distribuye según una ley Normal con media 2.9 Ha y desviación típica 0.6 Ha.

a) Indique la distribución de las medias muestrales para muestras de tamaño 169.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de tamaño 169 tenga una superficie media comprendida entre 2.8 y 3 Ha?

SOCIALES II. 2004 RESERVA 2. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(2.9; \frac{0.6}{\sqrt{169}}\right) = N(2.9; 0.046)$

b)

$$\begin{aligned} p(2.8 < x < 3) &= p\left(\frac{2.8 - 2.9}{0.046} < z < \frac{3 - 2.9}{0.046}\right) = p(-2.17 < z < 2.17) = 2p(z < 2.17) - 1 = \\ &= 2 \cdot 0.9850 - 1 = 0.97 \end{aligned}$$

a) De una población Normal de media desconocida y desviación típica 6, se extrae la siguiente muestra

82 , 78 , 90 , 89 , 92 , 85 , 79 , 63 , 71

Determine un intervalo de confianza, al 98%, para la media de la población.

b) Determine el tamaño que debe tener otra muestra de esta población para que un intervalo de confianza para la media, al 98%, tenga una amplitud igual a 4.66.

SOCIALES II. 2004 RESERVA 2. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\frac{1+0'98}{2} = 0'99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'33$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(81 \pm 2'33 \frac{6}{\sqrt{9}} \right) = (81 \pm 4'66) = (76'34 ; 85'66)$$

b)

$$E = \frac{4'66}{2} = 2'33$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 2'33 = 2'33 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 36$$

La duración de un cierto tipo de bombillas eléctricas se distribuye según una ley Normal con desviación típica 1500 horas.

a) Si en una muestra de tamaño 100, tomada al azar, se ha observado que la vida media es de 9900 horas, determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la vida media de esta clase de bombillas.

b) Con un nivel de confianza del 99% se ha construido un intervalo para la media con un error máximo de 772.5 horas, ¿qué tamaño de la muestra se ha tomado en este caso?

SOCIALES II. 2004 RESERVA 3. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como el nivel de confianza es del 95%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(9900 \pm 1'96 \frac{1500}{\sqrt{100}} \right) = (9900 \pm 294) = (9606 ; 10194)$$

b) Como el nivel de confianza es del 99%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 772'5 = 2'575 \frac{1500}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 25$$

Una variable aleatoria puede tomar los valores 20, 24 y 30. Mediante muestreo aleatorio simple se forman todas las muestras posibles de tamaño 2.

a) Escriba todas las muestras posibles.

b) Calcule la media y varianza de las medias muestrales.

SOCIALES II. 2004 RESERVA 3. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

(20, 20) (20, 24) (20, 30)

(24, 20) (24, 24) (24, 30)

(30, 20) (30, 24) (30, 30)

b) Construimos la tabla para las medias muestrales:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
20	1	20	400
22	2	44	968
24	1	24	576
25	2	50	1250
27	2	54	1458
30	1	30	900
	9	222	5552

$$\text{Media} = \mu = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{222}{9} = 24'66$$

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{5552}{9} - \left(\frac{222}{9}\right)^2 = 8'44$$

Para estudiar el gasto mensual en teléfono móvil de los jóvenes de una ciudad se ha elegido una muestra aleatoria de 16 estudiantes, con los resultados siguientes, expresados en euros:

4, 6, 30, 14, 16, 14, 15, 16, 22, 8, 3, 56, 42, 26, 30, 18.

Admitiendo que este gasto mensual sigue una ley Normal con desviación típica 13'78 euros, determine un intervalo de confianza, al 95 %, para la media del gasto mensual.

SOCIALES II. 2002 RESERVA 4. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

La distribución es: $N\left(20, \frac{13'78}{\sqrt{16}}\right) = N(20, 3'44)$

Calculamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (20 \pm 1'96 \cdot 3'44) = (13'26; 26'74)$$

La resistencia a la rotura, de un tipo de hilos de pesca, es una variable aleatoria Normal, con media 4 kg y desviación típica 1.4 kg. Se toman muestras aleatorias de 25 hilos de este tipo y se obtiene la resistencia media a la rotura.

a) ¿Cómo se distribuye la resistencia media a la rotura?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia media a la rotura no pertenezca al intervalo de extremos 3.90 kg y 4.15 kg ?

SOCIALES II. 2004 RESERVA 4. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(4; \frac{1.4}{\sqrt{25}}\right) = N(4; 0.28)$

b)

$$p(3.90 < x < 4.15) = p\left(\frac{3.90-4}{0.28} < z < \frac{4.15-4}{0.28}\right) = p(-0.35 < z < 0.53) = p(z < 0.53) - [1 - p(z < 0.35)] =$$
$$= 0.7019 - 1 + 0.6368 = 0.3387$$

La probabilidad de que no pertenezca a ese intervalo es: $1 - 0.3387 = 0.6613$

Dada la población de elementos {3, 4, 5, 8}, se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio con reemplazamiento.

- a) Escriba todas las muestras posibles.
b) Calcule la varianza de la población.
c) Calcule la varianza de las medias muestrales.

SOCIALES II. 2004 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

- a) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 8)
(4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 8)
(5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 8)
(8, 3) (8, 4) (8, 5) (8, 8)

b) Construimos la tabla para la población:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
3	1	3	9
4	1	4	16
5	1	5	25
8	1	8	64
	4	20	114

$$\text{Media} = \mu = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{114}{4} - 5^2 = 3'5$$

c) Construimos la tabla para las medias muestrales:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
3	1	3	9
3'5	2	7	24'5
4	3	12	48
4'5	2	9	40'5
5	1	5	25
5'5	2	11	60'5
6	2	12	72
6'5	2	13	84'5
8	1	8	64
	16	80	428

$$\text{Media} = \mu = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{80}{16} = 5$$

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{428}{16} - 5^2 = 1'75$$

El número de horas semanales que los estudiantes de Bachillerato de una ciudad dedican al deporte se distribuye según una ley Normal de media 8 y varianza 7.29.

a) Para muestras de tamaño 36, indique cuál es la distribución de las medias muestrales.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 36 esté comprendida entre 7.82 y 8.36 horas?.

SOCIALES II. 2004 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(8; \frac{2'7}{\sqrt{36}}\right) = N(8; 0'45)$

b)

$$\begin{aligned} p(7'82 < x < 8'36) &= p\left(\frac{7'82-8}{0'45} < z < \frac{8'36-8}{0'45}\right) = p(-0'4 < z < 0'8) = p(z < 0'8) - p(z < -0'4) = \\ &= p(z < 0'8) - [1 - p(z < 0'4)] = 0'7881 - 1 + 0'6554 = 0'4435 \end{aligned}$$