

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 6: TEORÍA DE MUESTRAS

- Junio, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Parte II, Opción B

En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17'4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la que procede esa muestra es de 2 años.

a) Obtenga un intervalo de confianza al 95%, para la edad media de la población.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 0'5?.

SOCIALES II. 2007 JUNIO. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(17'4, \frac{2}{\sqrt{256}}\right) = N(17'4, 0'125)$

Como el nivel de confianza es del 95%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (17'4 \pm 1'96 \cdot 0'125) = (17'155; 17'645)$$

b) $\frac{1+0'90}{2} = 0'95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'645$

$$E = \frac{0'5}{2} = 1'645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{1'645 \cdot 2 \cdot 2}{0'5}\right)^2 = 173'18 \approx 174$$

En una granja avícola se ha tomado una muestra aleatoria de 200 polluelos de pato, entre los cuales se encontraron 120 hembras.

a) Halle un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para la proporción de hembras entre estos polluelos.

b) Razone, a la vista del intervalo encontrado, si a ese nivel de confianza puede admitirse que la verdadera proporción de hembras de pato en esa granja es 0'5.

SOCIALES II. 2007 JUNIO. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C. \left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{120}{200} = 0'6$$

$$\frac{1+0'98}{2} = 0'99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'33$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C. \left(0'6 - 2'33 \cdot \sqrt{\frac{0'6 \cdot 0'4}{200}}, 0'6 + 2'33 \cdot \sqrt{\frac{0'6 \cdot 0'4}{200}} \right) = (0'566; 0'634)$$

b) No, ya que 0'5 está fuera del intervalo.

El salario de los trabajadores de una ciudad sigue una distribución Normal con desviación típica 15 euros. Se quiere calcular un intervalo de confianza para el salario medio con un nivel de confianza del 98%. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que se necesitaría recoger para que el intervalo de confianza tenga una amplitud, como máximo, de 6 euros.
SOCIALES II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$E = 3$$

$$\frac{1+0'98}{2} = 0'99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'33$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 3 = 2'33 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{2'33 \cdot 15}{3} \right)^2 = 135'7 \approx 136$$

En una encuesta representativa realizada a 1230 personas de una ciudad, se obtuvo como resultado que 654 de ellas van al cine los fines de semana.

Calcule un intervalo de confianza, al 97%, para la proporción de asistencia al cine los fines de semana en dicha ciudad.

SOCIALES II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$p = \frac{654}{1230} = 0'53$$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(0'53 \pm 2'17 \sqrt{\frac{0'53 \cdot 0'47}{1230}} \right) = (0'53 \pm 0'03) = (0'5; 0'56)$$

En una Universidad se toma, al azar, una muestra de 400 alumnos y se observa que 160 de ellos han aprobado todas las asignaturas.

a) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para estimar el porcentaje de alumnos de esa Universidad que aprueban todas las asignaturas.

b) A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error no sea superior a 0.04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos alumnos, como mínimo, ha de tener la muestra?

SOCIALES II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$a) \quad p = \frac{160}{400} = 0'4$$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(0'4 \pm 2'17 \sqrt{\frac{0'4 \cdot 0'6}{400}} \right) = (0'4 \pm 0'0531) = (0'3469; 0'4531)$$

b) Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 0'04 = 2'17 \sqrt{\frac{0'4 \cdot 0'6}{n}} \Rightarrow n = \frac{2'17^2 \cdot 0'4 \cdot 0'6}{0'04^2} = 706'33 \simeq 707$$

Para realizar una encuesta en un Instituto se selecciona, aleatoriamente, una muestra de 50 alumnos y se les pregunta si tienen reproductores de mp3, contestando afirmativamente 20 de ellos. Calcule un intervalo de confianza, al 96%, para la proporción de alumnos que poseen reproductores de mp3 en la población total de alumnos del Instituto.

SOCIALES II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$p = \frac{20}{50} = 0'4$$

$$\frac{1+0'96}{2} = 0'98 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'06$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(0'4 \pm 2'06 \sqrt{\frac{0'4 \cdot 0'6}{50}} \right) = (0'4 \pm 0'1427) = (0'2573; 0'5427)$$

Se ha lanzado al aire una moneda 200 veces y se ha obtenido cara en 120 ocasiones.

a) Estime, mediante un intervalo de confianza, al 90%, la probabilidad de obtener cara.

b) Se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error cometido sea inferior a 0'03, con un nivel de confianza del 97%. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

SOCIALES II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $p = \frac{120}{200} = 0'6$

$$\frac{1 + 0'90}{2} = 0'95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'645$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(0'6 \pm 1'645 \sqrt{\frac{0'6 \cdot 0'4}{200}} \right) = (0'6 \pm 0'0569) = (0'5431; 0'6569)$$

b) Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 0'03 = 2'17 \sqrt{\frac{0'6 \cdot 0'4}{n}} \Rightarrow n = \frac{2'17^2 \cdot 0'4 \cdot 0'6}{0'03^2} = 1255'7 \approx 1256$$

Con los datos de una muestra aleatoria se estima que el porcentaje de hogares con conexión a Internet es del 30%, con un error máximo de la estimación de 0'06 y un nivel de confianza del 93%.

a) Obtenga el intervalo de confianza, al 93%, de la proporción de hogares con conexión a Internet.

b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra utilizada.

SOCIALES II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $p = 0'3$

$$\frac{1+0'93}{2} = 0'965 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'815$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (0'3 \pm 0'06) = (0'24; 0'36)$$

b) Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 0'06 = 1'815 \sqrt{\frac{0'3 \cdot 0'7}{n}} \Rightarrow n = \frac{1'815^2 \cdot 0'3 \cdot 0'7}{0'06^2} = 192'1 \approx 193$$

En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal con desviación típica 8. Se ha elegido, al azar, una muestra de tamaño 100 y su media ha sido 67.

a) Calcule el intervalo de confianza, al 93%, para la media de la población.

b) ¿Cuántos datos, como mínimo, son necesarios para estimar, con un nivel de confianza del 99%, la media de la población con un error no superior a 2?

SOCIALES II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\frac{1+0'93}{2} = 0'965 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'815$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(67 \pm 1'815 \frac{8}{\sqrt{100}} \right) = (67 \pm 1'452) = (65'548; 68'452)$$

b) Aplicando la fórmula, tenemos:

$$\frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

$$E = 2 = 2'575 \frac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{2'575 \cdot 8}{2} \right)^2 = 106'09 \approx 107$$

Para estimar la proporción de estudiantes de una Universidad que está a favor de un aumento del importe de las becas, se entrevistó, aleatoriamente, a 500 estudiantes, de los cuales 465 respondieron afirmativamente. Calcule el intervalo de confianza, al 98%, en el cual se hallará la proporción de la población universitaria que está a favor del aumento de la cuantía de las becas.

SOCIALES II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$p = \frac{465}{500} = 0'93$$

$$\frac{1+0'98}{2} = 0'99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'33$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(0'93 \pm 2'33 \sqrt{\frac{0'93 \cdot 0'07}{500}} \right) = (0'93 \pm 0'0265) = (0'9035; 0'9565)$$

Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley Normal de media 36 y desviación típica 4'8.

a) Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?.

b) ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?.

SOCIALES II. 2007 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(36, \frac{4'8}{\sqrt{16}}\right) = N(36, 1'2)$

$$p(x > 35) = p\left(z > \frac{35-36}{1'2}\right) = p(z > -0'83) = p(z < 0'83) = 0'7967$$

b) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(36, \frac{4'8}{\sqrt{25}}\right) = N(36, 0'96)$

$$\begin{aligned} p(34 < x < 36) &= p\left(\frac{34-36}{0'96} < z < \frac{36-36}{0'96}\right) = p(-2'08 < z < 0) = p(z < 0) - p(z < -2'08) = \\ &= p(z < 0) - [1 - p(z < 2'08)] = 0'5 - 1 + 0'9812 = 0'4812 \end{aligned}$$

Se sabe que (45'13;51'03) es un intervalo de confianza, al 95%, para la media de una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 15.

a) ¿Cuál es el error cometido?.

b) Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo necesario para que el error no sea superior a 1'8.

SOCIALES II. 2007 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La media es: $\mu = \frac{45'13 + 51'03}{2} = 48'08$

Luego, el error cometido será: $E = 51'03 - 48'08 = 2'95$

b) Como el nivel de confianza es del 95%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1 + 0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 1'8 = 1'96 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{1'96 \cdot 15}{1'8} \right)^2 = 266'7 \approx 267$$