

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

a) Calcule la función derivada de $f(x) = \frac{e^{-2x}}{(-x^2 + 2)^2}$

b) Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes $N(t)$ que acuden un día a una cadena de almacenes, en función del número de horas t que llevan abiertos, es $N(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t$, $0 \leq t \leq 8$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Sabiendo que el máximo de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b .

SOCIALES II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x) = \frac{-2e^{-2x}(-x^2 + 2)^2 - 2 \cdot (-2x)(-x^2 + 2) \cdot e^{-2x}}{(-x^2 + 2)^4} = \frac{-2e^{-2x}(-x^2 + 2) - 2 \cdot (-2x) \cdot e^{-2x}}{(-x^2 + 2)^3} =$$

$$= \frac{-2e^{-2x}(-x^2 + 2 - 2x)}{(-x^2 + 2)^3} = \frac{2e^{-2x}(x^2 + 2x - 2)}{(-x^2 + 2)^3}$$

b) El problema nos dice que la función tiene un máximo en el punto $(4, 160)$, con lo cual se verifica que:

$$N(4) = 160 \Rightarrow 16a + 4b = 160$$

$$N'(4) = 0 \Rightarrow 8a + b = 0$$

Resolviendo el sistema obtenemos que: $a = -10$; $b = 80$

Las funciones $I(t) = -2t^2 + 51t$ y $G(t) = t^2 - 3t + 96$ con $0 \leq t \leq 18$ representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, t , transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.

a) ¿Para qué valores de t , desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?

b) Determine la función que refleje los beneficios (ingresos menos gastos) en función de t y represéntela gráficamente.

c) ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento, los beneficios fueron máximos?. Calcule el valor de ese beneficio.

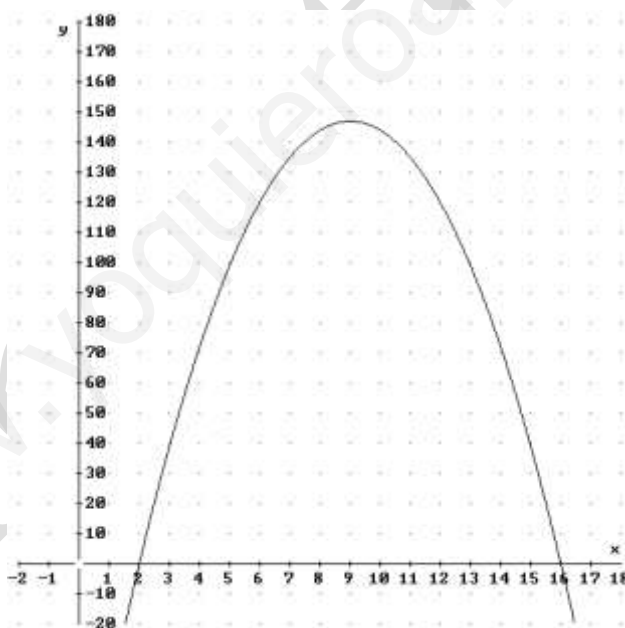
SOCIALES II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

RESOLUCIÓN

a)

$$I(t) = G(t) \Rightarrow -2t^2 + 51t = t^2 - 3t + 96 \Rightarrow 3t^2 - 54t + 96 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ y } t = 16$$

b) $B = I(t) - G(t) = -2t^2 + 51t - t^2 + 3t - 96 \Rightarrow -3t^2 + 54t - 96$



c) Calculamos el máximo.

$$B' = -6t + 54 = 0 \Rightarrow t = 9$$

El máximo corresponde a los 9 años y el beneficio obtenido es: $B(9) = -3 \cdot 9^2 + 54 \cdot 9 - 96 = 147$

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{si } x < 2 \\ \frac{4}{x} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f .

b) Determine los extremos locales de f .

c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 3$.

SOCIALES II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función $-x+4$ es continua y derivable para todos los valores; la función $\frac{4}{x}$ es continua y derivable para todos los valores excepto en $x=0$; la función x^2-4x+1 es continua y derivable para todos los valores. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=2$ y $x=4$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+4) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \Rightarrow \text{Continua en } x=2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 - 4x + 1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1 \Rightarrow \text{Continua en } x=4$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ -\frac{4}{x^2} & \text{si } 2 < x < 4 \\ 2x-4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = -1 \\ f'(2^+) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow \text{Derivable en } x=2$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(4^-) = -\frac{1}{4} \\ f'(4^+) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(4^-) \neq f'(4^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=4$$

Luego la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{4\}$

b) La función $f(x) = -x+4$ es la ecuación de una recta de pendiente -1 , por lo tanto, es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$. La función $f(x) = \frac{4}{x}$ es una hipérbola, que es decreciente en el intervalo $[2, 4)$. La función $f(x) = x^2 - 4x + 1$ es una parábola y en el intervalo $[4, +\infty)$ es creciente. Por lo tanto, la función tiene un mínimo relativo en el punto $(4, 1)$.

c) La ecuación de la tangente es: $y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3) \Rightarrow y - \frac{4}{3} = -\frac{4}{9}(x - 3) \Rightarrow 4x + 9y - 24 = 0$

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{2^x + x^2}{x} \quad ; \quad g(x) = (x^2 + 1)^2 \cdot \ln(e^{3x} + 4) \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{3x} - \frac{5}{x^2 - 2}$$

SOCIALES II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$f'(x) = \frac{(2^x \ln 2 + 2x) \cdot x - 1 \cdot (2^x + x^2)}{x^2} = \frac{2^x \cdot x \cdot \ln 2 + 2x^2 - 2^x - x^2}{x^2} = \frac{2^x(x \ln 2 - 1) + x^2}{x^2}$$

$$g'(x) = 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x \cdot \ln(e^{3x} + 4) + \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + 4} (x^2 + 1)^2 = (x^2 + 1) \left[4x \cdot \ln(e^{3x} + 4) + \frac{3e^{3x}(x^2 + 1)}{e^{3x} + 4} \right]$$

$$h'(x) = \frac{-3}{(3x)^2} - \frac{-2x \cdot 5}{(x^2 - 2)^2} = -\frac{1}{3x^2} + \frac{10x}{(x^2 - 2)^2}$$

Tras un test realizado a un nuevo modelo de automóvil, se ha observado que el consumo de gasolina, $c(x)$, expresado en litros, viene dado por la función

$$c(x) = 7.5 - 0.05x + 0.00025x^2$$

siendo x la velocidad en Km/h y $25 \leq x \leq 175$

a) Determine el consumo de gasolina a las velocidades de 50 Km/h y 150 Km/h.

b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $c(x)$.

c) ¿A qué velocidades de ese intervalo se obtiene el mínimo consumo y el máximo consumo y cuáles son éstos?.

SOCIALES II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) $c(50) = 7.5 - 0.05 \cdot 50 + 0.00025 \cdot 50^2 = 5.625 \text{ L}$

$$c(150) = 7.5 - 0.05 \cdot 150 + 0.00025 \cdot 150^2 = 5.625 \text{ L}$$

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$c'(x) = -0.05 + 0.0005x = 0 \Rightarrow x = 100$$

	(25,100)	(100,175)
Signo $c'(x)$	-	+
Función	D	C

↓
Mínimo (100,5)

c)

$$c(25) = 7.5 - 0.05 \cdot 25 + 0.00025 \cdot 25^2 = 6.40625 \text{ L}$$

$$c(100) = 7.5 - 0.05 \cdot 100 + 0.00025 \cdot 100^2 = 5 \text{ L}$$

$$c(175) = 7.5 - 0.05 \cdot 175 + 0.00025 \cdot 175^2 = 6.40625 \text{ L}$$

El consumo máximo es 6.40625 litros y se alcanza a las velocidades de 25 Km/h y 175 Km/h.

El consumo mínimo es 5 litros y se alcanza a la velocidad de 100 Km/h.

Se considera la función dada por $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{x-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f .

b) Halle las ecuaciones de las asíntotas de esta función.

SOCIALES II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $-\frac{2}{x+2}$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-2\}$. La función $\frac{2}{x-2}$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$. Por lo tanto, debemos estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{2}{x+2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x-2} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \Rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+2)^2} & \text{si } x < 0 \\ -\frac{2}{(x-2)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = \frac{1}{2} \\ f'(0^+) = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 0$$

Luego la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0, -2, 2\}$

b)

La recta $x = -2$ es una asíntota vertical, ya que: $\lim_{x \rightarrow -2} -\frac{2}{x+2} = \infty$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical, ya que: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-2} = \infty$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, ya que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-2} = 0$

Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, viene dada en función de la cantidad, x , que se invierte, también en miles de euros, por la siguiente expresión:

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.4x + 3.5 \quad \text{con } x \geq 10$$

a) Calcula la rentabilidad para una inversión de 100000 euros.

b) Deduzca y razone qué cantidad habría que invertir para obtener la máxima rentabilidad.

c) ¿Qué rentabilidad máxima se obtendría?

SOCIALES II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función está dada en miles de euros, entonces $x = 100$

$$R(100) = -0'001 \cdot 100^2 + 0'4 \cdot 100 + 3'5 = 33'5 \Rightarrow 33500 \text{ €}$$

b y c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero, para hallar el vértice de la parábola.

$$R'(x) = -0'002x + 0'4 = 0 \Rightarrow x = 200$$

La máxima rentabilidad estará en el vértice de la parábola o en el extremo $x = 10$

$$R(10) = -0'001 \cdot 10^2 + 0'4 \cdot 10 + 3'5 = 7'4 \Rightarrow 7400 \text{ €}$$

$$R(200) = -0'001 \cdot 200^2 + 0'4 \cdot 200 + 3'5 = 43'5 \Rightarrow 43500 \text{ €}$$

Luego, la máxima rentabilidad es de 43.500 € y se obtiene con una inversión de 200.000 €.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2ax + 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) Calcule el valor de a para que f sea continua en $x = 1$.

b) Para $a = 2$ estudie la continuidad y la derivabilidad de f .

SOCIALES II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Como es continua en $x = 1$, se cumple que:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - 2x^2 &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 2ax + 3 &= 4 - 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \Rightarrow -1 = 4 - 2a \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

b) La función que tenemos es: $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

En $x = 1$ la función no es continua, ya que el valor de a era $a = \frac{5}{2}$. Estudiamos en $x = 3$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} -x^2 + 8x - 15 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Es continua}$$

En $x = 1$ la función no es derivable ya que no es continua. Estudiamos la derivabilidad en $x = 3$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -4x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } 1 < x < 3 \\ -2x + 8 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= 2 \\ f'(3^+) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(3^-) = f'(3^+) \Rightarrow \text{Derivable en } x = 3$$

Luego la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$

El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ expresada a continuación

$$B(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t^2 - t + 5 & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{t+1}{2} & \text{si } 6 < t \leq 12 \end{cases}, t \text{ es el tiempo transcurrido en meses}$$

- a) Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses.
b) ¿Cuándo fue mínimo el beneficio?. ¿Cuál fue dicho beneficio?.
c) Represente gráficamente la función $B(t)$. ¿Cuándo fue máximo el beneficio?. ¿A cuánto ascendió?.

SOCIALES II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

- a) Estudiamos primero la continuidad en $t = 6$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 6^-} \frac{1}{8}t^2 - t + 5 &= \frac{7}{2} \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} \frac{t+1}{2} &= \frac{7}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B(6) = \lim_{t \rightarrow 6} B(t) = \frac{7}{2} \Rightarrow \text{Es continua}$$

Estudiamos la derivabilidad en $t = 6$

Calculamos la función derivada: $B'(t) = \begin{cases} \frac{t}{4} - 1 & \text{si } 0 \leq x < 6 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 12 \end{cases}$ y como:

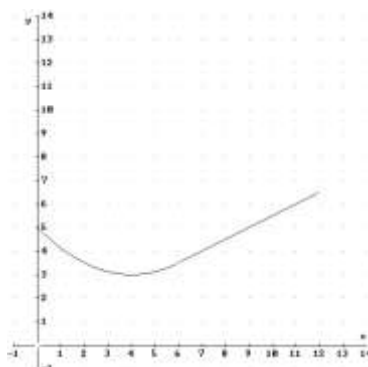
$$\left. \begin{aligned} B'(6^-) &= \frac{1}{2} \\ B'(6^+) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B'(6^-) = B'(6^+) \Rightarrow \text{Derivable en } t = 6$$

- b) El mínimo pueden estar en los extremos del intervalo $t = 0$ y $t = 12$, y también en las soluciones de $B'(t) = 0$.

$$B(0) = 5 ; B(12) = 6,5 ; B'(t) = \frac{t}{4} - 1 = 0 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow B(4) = 3$$

Luego, el mínimo beneficio fue de 3000 € y corresponde a $t = 4$

- c) El máximo beneficio fue de 6500 € y corresponde a $t = 12$. La representación gráfica de la función es:



a) La gráfica de la función derivada, f' , de una función f es una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$, y tiene su vértice en $(1, -4)$.

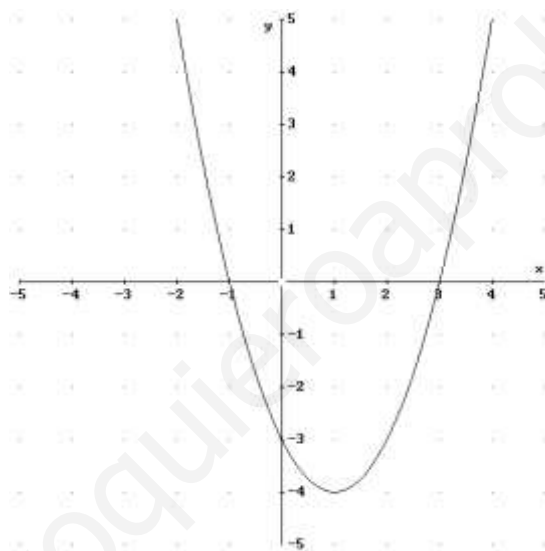
Estudie, a partir de ella, la monotonía de la función f e indique la abscisa de cada extremo relativo.

b) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = -2e^{3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$

SOCIALES II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que $f'(x)$ es positiva en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será creciente.

Vemos que $f'(x)$ es negativa en el intervalo $(-1, 3)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será decreciente.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
Signo f'	+	-	+
Función	C	D	C

↓ ↓
Máximo $x = -1$ mínimo $x = 3$

b) La recta tangente en $x = 0$ es $y - g(0) = g'(0) \cdot (x - 0)$

$$g(0) = -2$$

$$g'(x) = -6e^{3x} \Rightarrow g'(0) = -6$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y + 2 = -6 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -6x - 2$

- a) Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función $f(x) = \frac{4x}{2x+1}$
- b) Halle los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$.
- SOCIALES II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

Asíntotas Verticales: $x = -\frac{1}{2}$.

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 2$

Asíntota Oblicua: No tiene

Corte eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Corte eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$g'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
Signo g'	+	+
Función	C	C

La función es creciente en su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$g''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
Signo g''	-	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, \infty)$. Su punto de inflexión es $(-1, -1)$

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ 4 - \frac{a}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Halle el valor de a para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor de a .

b) Para $a = 1$, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal?. Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas.

SOCIALES II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 3x + 4 &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} 4 - \frac{a}{x} &= 4 - \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 2 = 4 - \frac{a}{2} \Rightarrow a = 4$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ \frac{4}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= 1 \\ f'(2^+) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow \text{Es derivable en } x = 2$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R}$.

b) La función $x^2 - 3x + 4$ es polinómica, por lo tanto, no tiene asíntotas. La función $4 - \frac{1}{x}$, tendría una asíntota vertical en $x = 0$, pero está fuera de su dominio. Tiene una asíntota horizontal

$$\text{Asíntota Horizontal: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - \frac{1}{x} = 4 - \frac{1}{\infty} = 4 \Rightarrow y = 4$$