

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

a) Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Determine los valores de a y b , para que la función f sea derivable en $x = 2$.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

SOCIALES II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x = 2$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 + 3x &= 4a + 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - bx - 4 &= -2b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 4a + 6 = -2b \Rightarrow 4a + 2b = -6$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= 4a + 3 \\ f'(2^+) &= 4 - b \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow 4a + 3 = 4 - b \Rightarrow 4a + b = 1$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones: $\begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2 ; b = -7$

b) Vamos a calcular la recta tangente.

$$g(0) = -2$$

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+2)}{(x-1)^2} \Rightarrow m = g'(0) = -3$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente, tenemos:

$$y - g(0) = g'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y + 2 = -3(x - 0) \Rightarrow y = -3x - 2$$

Se estima que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viene dado por la función $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcule el valor del parámetro a para que B sea una función continua.

b) Para $a = 8$ represente su gráfica e indique en qué períodos de tiempo la función crecerá o decrecerá.

c) Para $a = 8$ indique en qué momento se obtiene el máximo beneficio en los primeros 6 años y a cuánto asciende su valor.

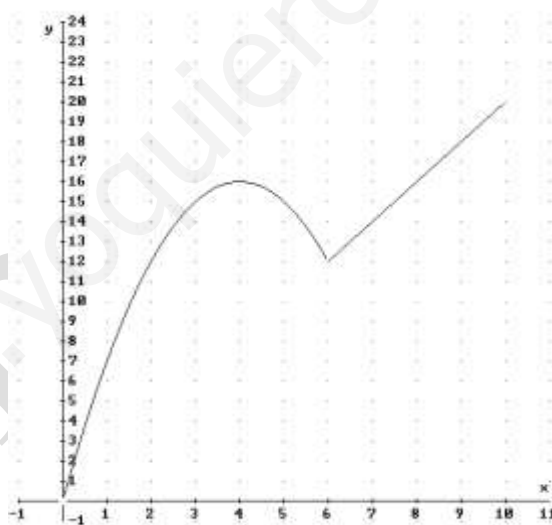
SOCIALES II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

RESOLUCIÓN

a) Estudiamos la continuidad en $t = 6$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 6^-} at - t^2 = 6a - 36 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} 2t = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 6^-} B(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} B(t) \Rightarrow 6a - 36 = 12 \Rightarrow a = 8$$

b) Hacemos la gráfica de la función:



Vemos que la función es creciente en: $(0, 4) \cup (6, 10)$ y decreciente en: $(4, 6)$

c) El máximo beneficio en los 6 primeros años se alcanza para $t = 4$ y vale 16 millones de euros

De la función f se sabe que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$

a) Estudie la monotonía y la curvatura de f .

b) Sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(1,1)$, calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

SOCIALES II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos la derivada a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1; x = \frac{5}{3}$$

	$(-\infty, 1)$	$\left(1, \frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$
Signo f'	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$ y decreciente en el intervalo: $\left(1, \frac{5}{3}\right)$.

Tiene un máximo en el punto $x = 1$ y un mínimo en $x = \frac{5}{3}$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

	$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$
Signo f''	-	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ y convexa en $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $x = \frac{4}{3}$

b) La ecuación de la tangente es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y = 1$

a) Dada la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$, determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 3)$ y alcanza un extremo en $x = -2$

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$, en el punto de abscisa $x = 1$.

SOCIALES II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\text{Pasa por } (1, 3) \Rightarrow 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = 3 \Rightarrow a + b = 1$$

$$\text{Extremo en } x = -2 \Rightarrow f'(-2) = 0 \Rightarrow 4 \cdot (-2) + a = 0 \Rightarrow a = 8$$

$$\text{Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que: } b = -7$$

b) La ecuación de la tangente es: $y - g(1) = g'(1) \cdot (x - 1)$

$$g(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2$$

$$g'(x) = 6x - 2 \Rightarrow g'(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 4$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$y - g(1) = g'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 2 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 2$$

a) Para la función f definida de la forma $f(x) = \frac{ax}{x+b}$, determine, razonadamente, los valores de a y b sabiendo que tiene como asíntota vertical la recta de ecuación $x = -2$ y como asíntota horizontal la de ecuación $y = 3$.

b) Para la función g , definida de la forma $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, determine: su dominio, sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. Con esos datos haga un esbozo de su gráfica.

SOCIALES II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Si igualamos el denominador a cero, obtenemos la asíntota vertical, luego:

$$x + b = 0 \Rightarrow x = -b = -2 \Rightarrow b = 2$$

Si calculamos el límite de la función cuando x tiende a ∞ , obtenemos la asíntota horizontal, luego:

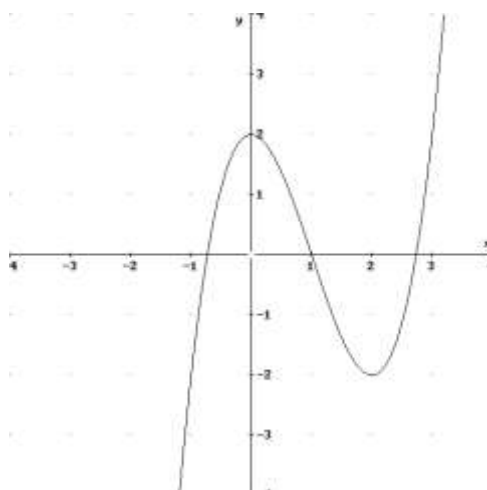
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = a \Rightarrow a = 3$$

b) Su dominio es $\mathbb{R}$, ya que es una función polinómica. Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$g'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $g'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$
 Máximo $(0, 2)$ Mínimo $(2, -2)$



Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x}{2} - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcule a y b para que la función sea continua en todo su dominio y presente un mínimo en $x = 1$

b) Represente gráficamente la función para $a = 1.5$ y $b = 0.5$

SOCIALES II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

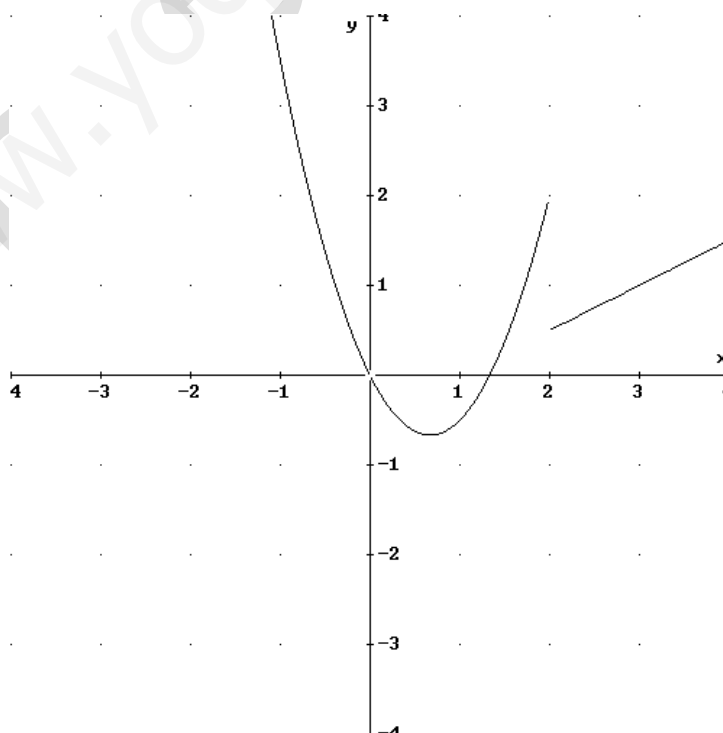
a) Para que sea continua se debe cumplir que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 - 2x = 4a - 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2} - b = 1 - b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 4a - 4 = 1 - b \Rightarrow 4a + b = 5$$

Si tiene un mínimo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 1 - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$

Sustituyendo en la otra ecuación, tenemos que: $b = 1$

b) Hacemos la gráfica de la función: $f(x) = \begin{cases} 1.5x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x}{2} - 0.5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



Se considera la función $f(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$

a) Determine la monotonía y curvatura de la función

b) Calcule sus asíntotas

c) Representela gráficamente.

SOCIALES II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Su dominio es $\mathbb{R} - \{-2\}$. Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow \text{No}$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	+
Función	C	C

La función es creciente en su dominio.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

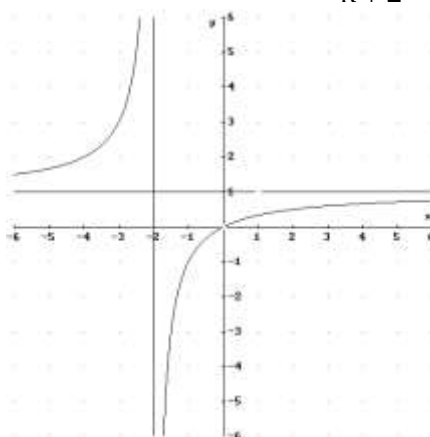
$$f''(x) = -\frac{4}{(x+2)^3} = 0 \Rightarrow \text{No}$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo $f''(x)$	+	-
Función	Cx	Cn

b) $f(x) = 1 - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$

La recta $x = -2$ es una asíntota vertical, ya que: $\lim_{x \rightarrow -2} -\frac{2}{x+2} = \infty$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal, ya que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+2} = 1$



Sea $P(t)$ el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de

enfermedad transcurrido un tiempo t , medido en meses:
$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{100t - 250}{t + 5} & \text{si } t > 5 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de la función P .

b) Estudie la derivabilidad de P en $t = 5$.

c) Estudie la monotonía de dicha función e interprete la evolución del porcentaje de células afectadas.

d) ¿En algún momento el porcentaje de células afectadas podría valer 50?.

SOCIALES II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en sólo en $t = 5$, ya que t^2 es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en $0 \leq t \leq 5$; y la función $\frac{100t - 250}{t + 5}$ es continua en $\mathbb{R} - \{-5\}$ y en particular en $t > 5$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} t^2 = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{100t - 250}{t + 5} = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^-} = \lim_{x \rightarrow 5^+} = P(5) \Rightarrow \text{Es continua}$$

b) Calculamos la función derivada: $P'(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 < t < 5 \\ \frac{750}{(t + 5)^2} & \text{si } t > 5 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} P'(5^-) = 10 \\ P'(5^+) = 7.5 \end{array} \right\} \Rightarrow P'(5^-) \neq P'(5^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } t = 5$$

c) Estudiamos la monotonía.

$2t = 0 \Rightarrow t = 0$. La función es creciente en $0 \leq t \leq 5$, ya que $P'(1) = +$. En $t = 0$ tiene un mínimo absoluto o relativo.

$$\frac{750}{(t + 5)^2} = 0 \Rightarrow \text{NO. La función es creciente en } t > 5, \text{ ya que } P'(6) = +$$

La función es siempre creciente, por lo tanto, el porcentaje de células afectadas crece con el tiempo.

d) $\frac{100t - 250}{t + 5} = 50 \Rightarrow 100t - 250 = 50t + 250 \Rightarrow 50t = 500 \Rightarrow t = 10$. Luego, a los 10 meses el porcentaje de células afectadas es 50.

Sean dos funciones, f y g , tales que las expresiones de sus funciones derivadas son, respectivamente, $f'(x) = x + 2$ y $g'(x) = 2$

a) Estudie la monotonía de las funciones f y g .

b) De las dos funciones f y g , indique, razonadamente, cuál de ellas tiene algún punto en el que su derivada es nula.

c) ¿Cuál de las funciones f y g es una función polinómica de primer grado? ¿Por qué?.

SOCIALES II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos la derivada a cero.

$$f'(x) = x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	+
Función	D	C

La función tiene un mínimo relativo en $x = -2$

Igualamos la derivada a cero.

$$g'(x) = 2 = 0 \Rightarrow \text{NO}$$

La función es creciente ya que $g'(x) > 0$

b) Solamente la función f tiene derivada nula, ya que tiene un mínimo relativo en $x = -2$.

c) La función g es una función polinómica de primer grado ya que al hacer la derivada queda un número.

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{3x} \cdot \ln(2x - 5)$

b) $g(x) = \frac{3^{2x}}{x^2 - 1}$

c) $h(x) = (3x^2 + 5x - 1)^6 + x^2 - \ln x$

SOCIALES II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x) = 3e^{3x} \cdot \ln(2x - 5) + e^{3x} \cdot \frac{2}{2x - 5}$

b) $g'(x) = \frac{2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3(x^2 - 1) - 2x \cdot 3^{2x}}{(x^2 - 1)^2}$

c) $h'(x) = 6 \cdot (3x^2 + 5x - 1)^5 \cdot (6x + 5) + 2x - \frac{1}{x}$

Determine los valores que han de tomar a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 7 & \text{si } x < 1 \\ 4x - b & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ sea derivable en } \mathbb{R}.$$

SOCIALES II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + ax - 7 = -1 + a - 7 = a - 8 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 4x - b = 4 - b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow a - 8 = 4 - b \Rightarrow a + b = 12$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 + a \\ f'(1^+) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow -2 + a = 4 \Rightarrow a = 6$$

Luego, los valores son: $a = 6$; $b = 6$

En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en Km^2 , viene dada por la función $f(t) = \frac{11t + 20}{t + 2}$, siendo t el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.

- a) ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente, cuando empezamos a medirla
- b) Estudie si la mancha crece o decrece con el tiempo
- c) ¿Tiene algún límite la extensión de la superficie de la mancha?

SOCIALES II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos $f(0)$

$$f(0) = \frac{11 \cdot 0 + 20}{0 + 2} = 10 \text{ km}^2$$

- b) Calculamos la derivada de la función

$$f'(t) = \frac{11 \cdot (t + 2) - 1 \cdot (11t + 20)}{(t + 2)^2} = \frac{2}{(t + 2)^2}$$

Como $f'(t)$ es positiva para cualquier valor de t , la función es creciente y, por lo tanto, la mancha crece con el tiempo.

- c) Calculamos la asíntota horizontal

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{11t + 20}{t + 2} = \frac{\infty}{\infty} = 11$$

Luego, la extensión de la mancha será como máximo de 11 km^2 .