

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

a) Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{3\ln(x)}{x^3}$$

$$g(x) = (1-x^2) \cdot (x^3-1)^2$$

$$h(x) = 3x^2 - 7x + \frac{1}{e^{2x}}$$

b) Halle las asíntotas de la función $p(x) = \frac{7x}{3x-12}$

SOCIALES II. 2015 JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

RESOLUCIÓN

$$a) f'(x) = \frac{3 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^3 - 3x^2 \cdot 3\ln x}{(x^3)^2} = \frac{3x^2 \cdot (1-3\ln x)}{x^6} = \frac{3 \cdot (1-3\ln x)}{x^4}$$

$$g'(x) = -2x \cdot (x^3-1)^2 + 2 \cdot (x^3-1) \cdot 3x^2 \cdot (1-x^2) = (x^3-1) \cdot (-2x^4 + 2x + 6x^2 - 6x^4) = (x^3-1) \cdot (-8x^4 + 6x^2 + 2x)$$

$$h'(x) = 6x - 7 - \frac{2 \cdot e^{2x}}{(e^{2x})^2} = 6x - 7 - \frac{2}{e^{2x}}$$

$$b) p(x) = \frac{7x}{3x-12}$$

La recta $x=4$ es una asíntota vertical, ya que: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{7x}{3x-12} = \frac{28}{0} = \infty$

La recta $y = \frac{7}{3}$ es una asíntota horizontal, ya que: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x}{3x-12} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$

No tiene asíntota oblicua, ya que tiene asíntota horizontal.

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{8x+a}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a) Determine el valor de a , para que la función sea continua.

b) ¿Para $a = -10$, es creciente la función en $x = 3$?

c) Halle sus asíntotas para $a = -10$

SOCIALES II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función racional $\frac{8x+a}{x-1}$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$. La función polinómica $x^2 + 2$ es continua en \mathbb{R} . Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad en $x = 2$.

Estudiamos la continuidad en $x = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8x+a}{x-1} = 16+a \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 6 = 16 + a \Rightarrow a = -10$$

b) Calculamos la derivada

$$f'(x) = \frac{8(x-1) - 1(8x-10)}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{Es creciente}$$

b) La función polinómica $x^2 + 2$ no tiene asíntotas.

Calculamos las asíntotas de la función racional $\frac{8x-10}{x-1}$

Asíntota vertical: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{8x-10}{x-1} = \infty \Rightarrow x = 1$ es una asíntota vertical, pero no está en su dominio

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x-10}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} = 8 \Rightarrow y = 8$ es la asíntota horizontal.

Una entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, $R(x)$, en miles de euros, viene dada por la función

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 2.5 \quad 1 \leq x \leq 500$$

donde x es la cantidad de dinero invertida en miles de euros.

- Determine qué cantidad de dinero se debe invertir para obtener la máxima rentabilidad.
- ¿Qué rentabilidad se obtendría con dicha inversión?
- ¿Cuál es la cantidad de dinero para la que se obtiene menor rentabilidad?

SOCIALES II. 2015 RESERVA 1 EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

- a) El máximo absoluto estará en los extremos del intervalo o bien en las soluciones de la ecuación $R'(x) = 0$.

$$R(1) = -0'001 \cdot 1^2 + 0'5 \cdot 1 + 2'5 = 2'999$$

$$R(500) = -0'001 \cdot 500^2 + 0'5 \cdot 500 + 2'5 = 2'5$$

$$R'(x) = -0'002x + 0,5 = 0 \Rightarrow x = 250 \Rightarrow R(250) = -0'001 \cdot 250^2 + 0'5 \cdot 250 + 2'5 = 65$$

Luego, vemos que el máximo absoluto corresponde para $x = 250$. Por lo tanto la cantidad que se debe invertir son 250.000 €.

- La rentabilidad para ese valor de x es 65.000 €
- La menor rentabilidad se obtiene para $x = 500$ y es de 2.500 €

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax-12) & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + b(x-1) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

a) Halle los valores de a y b sabiendo que la función es derivable en $x = -1$

b) Para $a = 1$ y $b = -1$ y obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -2$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 1 EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) La función polinómica $\frac{1}{2}(ax-12)$ es continua y derivable en \mathbb{R} . La función polinómica $-x^2 + b(x-1)$ es continua y derivable en \mathbb{R} . Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x = -1$.

Estudiamos la continuidad en $x = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{2}(ax-12) = \frac{-a-12}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} -x^2 + b(x-1) = -1-2b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow \frac{-a-12}{2} = -1-2b \Rightarrow -a+4b = 10$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = -1$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}a & \text{si } x < -1 \\ -2x+b & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ y como es derivable, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1^-) = \frac{1}{2}a \\ f'(-1^+) = 2+b \end{array} \right\} \Rightarrow f'(-1^-) = f'(-1^+) \Rightarrow \frac{1}{2}a = 2+b \Rightarrow a-2b = 4$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a = 18$; $b = 7$

b) La recta tangente en $x = -2$, es: $y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2)$.

$$- f(-2) = -7$$

$$- f'(x) = \frac{1}{2}a \Rightarrow f'(-2) = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos: $y + 7 = \frac{1}{2} \cdot (x + 2) \Rightarrow x - 2y - 12 = 0$

La mosca común solamente vive si la temperatura media de su entorno está comprendida entre 4°C y 36°C . La vida en días, en función de la temperatura media T , medida en grados centígrados, viene dada por la función:

$$V(T) = -\frac{1}{16}(T^2 - 40T + 16) \quad T \in [4, 36]$$

- a) Determine la vida máxima que puede alcanzar la mosca común.
b) Calcule la vida mínima e indique la temperatura media a la que se alcanza.
c) Si sabemos que una mosca ha vivido 15 días, ¿a qué temperatura media ha estado el entorno donde ha habitado?

SOCIALES II. 2015 RESERVA 2 EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

- a) El máximo absoluto estará en los extremos del intervalo o bien en las soluciones de la ecuación $V'(T) = 0$.

$$V(4) = -\frac{1}{16}(16 - 160 + 16) = 8$$

$$V(36) = -\frac{1}{16}(1296 - 1440 + 16) = 8$$

$$V' = -\frac{1}{16}(2T - 40) = 0 \Rightarrow T = 20 \Rightarrow V(20) = -\frac{1}{16}(400 - 800 + 16) = 24$$

Luego, vemos que el máximo absoluto corresponde para $T = 20$. Por lo tanto, la vida máxima es de 24 días y se alcanza a la temperatura de 20°C .

- b) La vida mínima es de 8 días y se alcanza a la temperatura de 4°C ó a 36°C .

c)

$$15 = -\frac{1}{16}(T^2 - 40T + 16) \Rightarrow T^2 - 40T + 256 = 0 \Rightarrow T = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1024}}{2} = \frac{40 \pm 24}{2} \Rightarrow T = 32 ; T = 8$$

Por lo tanto, la temperatura ha sido 8°C ó 32°C

Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2 \cdot (1-3x)^2}{1+3x}$

b) $g(x) = (x^2 - x + 1) \cdot e^{5x}$

c) $h(x) = \log(x^2 + x + 1)$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 2 EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x) = \frac{2 \cdot 2 \cdot (1-3x) \cdot (-3) \cdot (1+3x) - 3 \cdot 2 \cdot (1-3x)^2}{(1+3x)^2} = \frac{54x^2 + 36x - 18}{(1+3x)^2}$

b) $g'(x) = (2x-1) \cdot e^{5x} + 5 \cdot e^{5x} \cdot (x^2 - x + 1) = e^{5x} \cdot (5x^2 - 3x + 4)$

c) $h'(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} \log e$

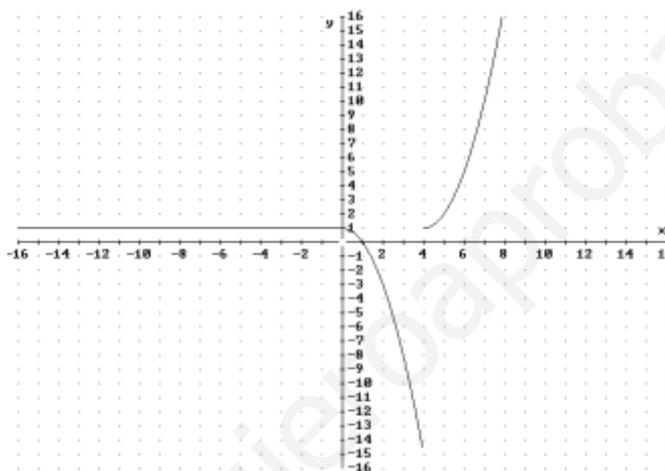
$$\text{Sea la función } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si } 0 < x < 4 \\ x^2 - 8x + 17 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- a) Represente gráficamente la función f .
b) Estudie su continuidad y derivabilidad.
c) Calcule $f'(1)$ y $f'(5)$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 3 EJERCICIO 2. OPCION A

RESOLUCIÓN

a)



b) Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua en $x=0$ y $x=4$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} (-x^2 + 1) = -15 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 - 8x + 17) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \Rightarrow \text{No es continua en } x=4$$

Luego, la función es continua en $\mathbb{R} - \{4\}$

Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es derivable en $x=0$ y $x=4$.

$$\text{Calculamos la función derivada: } f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -2x & \text{si } 0 < x < 4 \\ 2x - 8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \text{Derivable en } x=0$$

La función no es derivable en $x=4$ ya que no es continua, luego la función es derivable en $\mathbb{R} - \{4\}$

c) $f'(1) = -2$; $f'(5) = 2$.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{x+4} & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Determine y represente gráficamente sus asíntotas. Calcule el punto donde la gráfica de la función f corta al eje de ordenadas.

b) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = -3$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 4 EJERCICIO 2. OPCION A

RESOLUCIÓN

a) La función $x^3 - 3x^2$ al ser polinómica no tiene asíntotas. Estudiamos las asíntotas de la función

$$\frac{2x-5}{x+4}$$

Verticales: La recta $x = a$ es una asíntota vertical si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \frac{-13}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \frac{-13}{0^-} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = -4 \text{ es una asíntota vertical}$$

Horizontales: La recta $y = b$ es una asíntota horizontal si

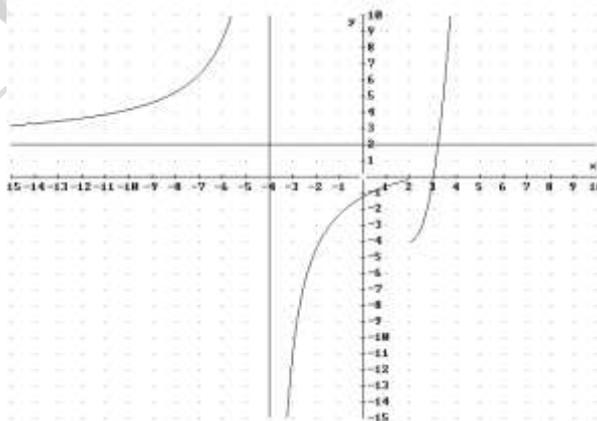
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-5}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Oblicuas: No tiene.

Calculamos el punto de corte con el eje de ordenadas

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 0 - 5}{0 + 4} = -\frac{5}{4} = -1'25 \Rightarrow (0, -1'25)$$

Hacemos el dibujo de la función y las asíntotas



b) La recta tangente en $x = -3$ es $y - f(-3) = f'(-3) \cdot (x + 3)$

$$f(-3) = \frac{-11}{1} = -11 \quad ; \quad f'(x) = \frac{2(x+4) - 1(2x-5)}{(x+4)^2} \Rightarrow f'(-3) = \frac{2+11}{1} = 13$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y + 11 = 13 \cdot (x + 3) \Rightarrow y = 13x + 28$

Se considera la función f , definida a trozos por la expresión

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 6 & \text{si } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de la función.

b) Analice la derivabilidad de la función.

c) Representela gráficamente, determinando los extremos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de corte con los ejes.

SOCIALES II. 2015 RESERVA 4 EJERCICIO 2. OPCION B

RESOLUCIÓN

a y b) La función polinómica $-x^2 + x + 6$ es continua y derivable en \mathbb{R} . La función polinómica $x + 2$ es continua y derivable en \mathbb{R} . Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x = 2$.

Estudiamos la continuidad en $x = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 + x + 6 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} = \lim_{x \rightarrow 2^+} = f(2) = 4 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 2$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 2$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = -3 \\ f'(2^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 2$$

Por lo tanto, la función es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

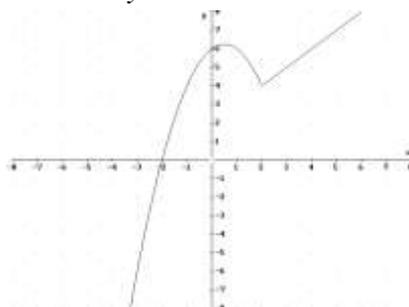
c) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $-2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

Tiene un máximo relativo en $(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$. En $(2, 4)$ tiene un mínimo relativo (pico), no derivable.

Puntos de corte eje X $(-2, 0)$ ya que $y = 0 \Rightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2 ; x = 3$ (No)

Puntos de corte eje Y $(0, 6)$ ya que $x = 0 \Rightarrow y = 6$



a) Determine el valor de a para que sea continua en $x = -1$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x-1} & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

b) Calcule los coeficientes b y c de la función $g(x) = x^3 + bx^2 + cx - 2$ para que $(1, 2)$ sea un punto de inflexión de g

SOCIALES II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

RESOLUCIÓN

a) Estudiamos la continuidad en $x = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ax}{x-1} = \frac{-a}{-2} = \frac{a}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = -12 \Rightarrow a = -24$$

b) Calculamos la primera y segunda derivada de g

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 + 2bx + c \\ g''(x) &= 6x + 2b \end{aligned}$$

- Por ser punto de inflexión $\Rightarrow g''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2b = 0 \Rightarrow b = -3$

- La función pasa por $(1, 2) \Rightarrow g(1) = 2 \Rightarrow 1 - 3 + c - 2 = 2 \Rightarrow c = 6$

Luego, los valores son: $b = -3$; $c = 6$

Sea la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 8$

a) Halle las coordenadas de sus extremos relativos y de su punto de inflexión, si existen.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

SOCIALES II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = 3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow x = 0; x = 6$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 6)$	$(6, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(0, 6)$. Tiene un máximo relativo en $(0, 8)$ y un mínimo relativo en $(6, -100)$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en el intervalo: $(-\infty, 3)$ y convexa en el intervalo $(3, +\infty)$. Por lo tanto, tiene un punto de inflexión en $(3, -46)$.

b) Calculamos la recta tangente en $x = 1$

$$f(1) = (1)^3 - 9 \cdot (1)^2 + 8 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot (1)^2 - 18 \cdot 1 = -15$$

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 0 = -15(x - 1) \Rightarrow y = -15x + 15$$