

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio B3
- Junio, Ejercicio B4
- Reserva 1, Ejercicio B3
- Reserva 1, Ejercicio B4
- Reserva 2, Ejercicio B3
- Reserva 2, Ejercicio B4
- Reserva 3, Ejercicio B3
- Reserva 3, Ejercicio B4
- Reserva 4, Ejercicio B3
- Reserva 4, Ejercicio B4
- Septiembre, Ejercicio B3
- Septiembre, Ejercicio B4

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

a) (1 Punto) Determine los valores de a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2, 36)$.

b) (0'75 puntos) Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.

c) (0'75 Puntos) Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

SOCIALES II. 2020. JUNIO. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\text{Extremo relativo en } (2, 36) \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 36 \Rightarrow 8a + 2b + 4 = 36 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + b = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a = -2$; $b = 24$

b) Calculamos la derivada de la función $f(x) = 4x^3 - 3x + 4$ y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y decreciente en el intervalo:

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

c) Calculamos la integral

$$F(x) = \int (4x^3 - 3x + 4) dx = 4 \frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^2}{2} + 4x + C = x^4 - \frac{3x^2}{2} + 4x + C$$

Como sabemos que $F(2) = 10$, entonces:

$$F(2) = 10 \Rightarrow 16 - 6 + 8 + C = 10 \Rightarrow C = -8$$

Luego, la función es: $F(x) = x^4 - \frac{3x^2}{2} + 4x - 8$

a) (1'2 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones

$$f(x) = (-5 + x^2)^2 \cdot e^{3x} \quad g(x) = \frac{\ln(x^3 - 5x)}{1 - x^2}$$

b) (1'3 puntos) Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x) = -x^2 + 2x + 3$ y el eje de abscisas

SOCIALES II. 2020. JUNIO. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x) = 2 \cdot (-5 + x^2) \cdot 2x \cdot e^{3x} + 3 \cdot e^{3x} \cdot (-5 + x^2)^2 = e^{3x} \cdot (-5 + x^2) [3x^2 + 4x - 15]$$

$$g'(x) = \frac{\frac{3x^2 - 5}{x^3 - 5x} \cdot (1 - x^2) - (-2x) \cdot \ln(x^3 - 5x)}{(1 - x^2)^2}$$

b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$\left. \begin{array}{l} h(x) = -x^2 + 2x + 3 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 3$$

Tenemos que ver cuál de las dos funciones va por encima y cuál va por debajo. Para ello sustituimos un valor comprendido entre -1 y 3 , y vemos cuál tiene mayor valor.

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow h(0) = 3$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow y = 0$$

Por lo tanto, la función que va por encima es $h(x) = -x^2 + 2x + 3$. Luego el área vendrá dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 [(-x^2 + 2x + 3) - (0)] dx = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = \\ &= \left(-\frac{27}{3} + 9 + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = \frac{32}{3} u^2 \end{aligned}$$

a) (1'2 puntos) Se considera la función $f(x) = ax^2 + bx + 3$. Calcule los valores a y b , sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(2, 3)$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto es $m = -2$.

b) (1'3 puntos) Represente gráficamente la función $g(x) = -x^2 + 6x - 5$ y calcule el área comprendida entre la gráfica de la función g , el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.
SOCIALES II. 2020 RESERVA 1. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 2ax + b$

- Pasa por $(2, 3) \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow 4a + 2b + 3 = 3 \Rightarrow 4a + 2b = 0$

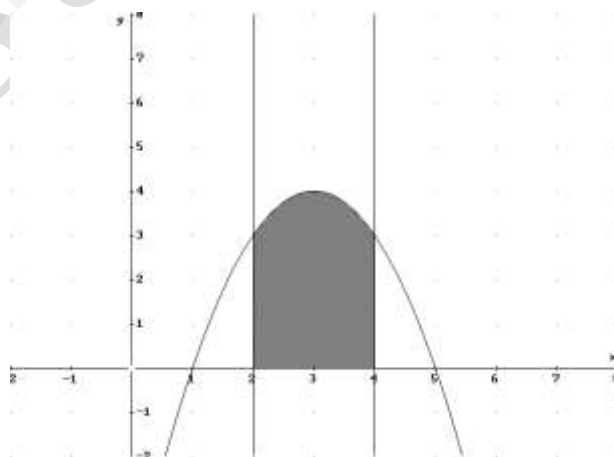
- Tangente en ese punto pendiente $m = -2 \Rightarrow f'(2) = -2 \Rightarrow 4a + b = -2$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 4a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -1; b = 2$$

b) Representamos la parábola

x	$y = -x^2 + 6x - 5$
Vértice $-\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$	4
2	3
4	3
1	0
5	0



Calculamos el área

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 (-x^2 + 6x - 5) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 5x \right]_2^4 = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_2^4 \\ &= \left[-\frac{4^3}{3} + 3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 \right] - \left[-\frac{2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 \right] = -\frac{64}{3} + 48 - 20 + \frac{8}{3} - 12 + 10 = \frac{22}{3} u^2 \end{aligned}$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie la monotonía y curvatura de f en su dominio.

c) (0'5 puntos) Calcule las ecuaciones de las asíntotas de f .

SOCIALES II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\frac{1}{1-x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. La función $x^2 + x + 1$ al ser polinómica es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x + 1) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-x} \right) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

Vamos a estudiar la derivabilidad en $x = 0$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 1 \\ f'(0^+) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \text{Si es derivable en } x = 0$$

Por lo tanto, la función es continua derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow \text{No.}$$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	+	+
Función	D	C	C	C

La función es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Tiene un mínimo en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 2 = 0 \Rightarrow \text{No}$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 0 \Rightarrow \text{No}.$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f''(x)$	+	+	-
Función	Cx	Cx	Cn

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ y cóncava en el intervalo $(1, +\infty)$. No tiene punto de inflexión.

c) La función polinómica $x^2 + x + 1$ no tiene asíntotas. Calculamos las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ para } x > 0$$

Asíntota vertical $x=1$, ya que $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty \end{cases}$

Asíntota horizontal $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$

Asíntota oblicua: No tiene

a) (1'2 puntos) Calcule la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \ln(3x^2 - 3) + \frac{1-2x}{x+2} \quad g(x) = 2e^{x^3} + x^2(3x+4)^3$$

b) (1'3 puntos) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las funciones

$h(x) = x^2 + 1$ y $p(x) = \frac{x-1}{x+1}$, en el punto de abscisa $x=1$. ¿En qué punto se cortan ambas rectas?

SOCIALES II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x) = \frac{6x}{(3x^2-3)} + \frac{-2 \cdot (x+2) - 1 \cdot (1-2x)}{(x+2)^2} = \frac{6x}{(3x^2-3)} + \frac{-5}{(x+2)^2} = \frac{2x}{x^2-1} + \frac{-5}{(x+2)^2}$$

$$g'(x) = 6x^2 \cdot e^{x^3} + 2x \cdot (3x+4)^3 + x^2 \cdot 3 \cdot (3x+4)^2 \cdot 3 = 6x^2 \cdot e^{x^3} + (3x+4)^2 \cdot (15x^2 + 8x)$$

b) La recta tangente en $x=1$ es $y - h(1) = h'(1) \cdot (x-1)$

$$- h(1) = 2$$

$$- h'(x) = 2x \Rightarrow h'(1) = 2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 2 = 2 \cdot (x-1) \Rightarrow y = 2x$

La recta tangente en $x=1$ es $y - p(1) = p'(1) \cdot (x-1)$

$$- p(1) = 0$$

$$- p'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow p'(1) = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 0 = \frac{1}{2} \cdot (x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Resolvemos el sistema para calcular el punto de corte

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x+1}{x+3} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Halle a y b para que la función sea continua en todo su dominio. Para esos valores de a y b , ¿es f derivable en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?

b) (0'5 puntos) Para $a = -1$ y $b = 4$, estudie la monotonía de la función f .

c) (0'5 puntos) Para $a = -1$ y $b = 4$, calcule $\int_1^2 f(x) dx$

SOCIALES II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO B4

RESOLUCIÓN

a) Por ser continua en $x = -1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(ax + \frac{1}{2} \right) &= -a + \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x+1}{x+3} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Por ser continua en $x = 1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x+3} \right) &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - bx) &= 1 - b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x < -1 \\ \frac{2}{(x+3)^2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

En $x = -1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} f'(-1^-) &= \frac{1}{2} \\ f'(-1^+) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(-1^-) = f'(-1^+) \Rightarrow \text{Derivable:}$

En $x = 1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \frac{1}{8} \\ f'(1^+) &= \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable}$

b) Calculamos la función derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ \frac{2}{(x+3)^2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Igualamos la derivada a cero: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-	+
Función	D	C	D	C

La función es creciente en $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$. Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$

Tiene un mínimo en $(2, -4)$

c) Calculamos la integral que nos piden

$$\int_1^2 (x^2 - 4x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 8 \right) - \left(\frac{1}{3} - 2 \right) = -\frac{11}{3}$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x+b}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) (1'2 puntos) Halle a y b para que f sea continua y derivable en $x = 0$.

b) (0'7 puntos) Para $a = 1$ y $b = -2$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

c) (0'6 puntos) Para $a = 1$ y $b = 1$, halle, si existen, las ecuaciones de las asíntotas de f .

SOCIALES II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Como es continua en $x = 0$, se cumple que:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + 2) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+b}{x-1} \right) &= -b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow -b = 2 \Rightarrow b = -2$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{-1-b}{(x-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como la función es derivable en $x = 0$, $\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= a \\ f'(0^+) &= \frac{-1-2}{1} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a = -1$

b) Calculamos la tangente a la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-2}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

$$f(0) = 2$$

$$f'(0) = 1$$

$$\text{Luego: } y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 2 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x + 2$$

c) Calculamos las asíntotas de la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Para $x \leq 0$, la función $f(x) = x^2 + x + 2$, no tiene asíntotas ya que es una función polinómica.

Para $x > 0$, calculamos las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Asíntota vertical $x = 1$, ya que: $\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} &= +\infty \end{aligned} \right.$

Asíntota horizontal $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} = 1 \Rightarrow y = 1$

Asíntota oblicua: no tiene

El número de bacterias en un determinado cultivo viene dado por la función $B(t)$, donde t representa el tiempo en horas, con $0 \leq t \leq 7$. La variación instantánea en la población de bacterias en el cultivo viene dada por la derivada de la función B , cuya expresión es $B'(t) = 50000 \cdot e^{2t}$.

a) (0'75 puntos) ¿Existe algún instante t en el que el número de bacterias en el cultivo comience a decrecer?

b) (1'5 puntos) Obtenga la expresión de la función $B(t)$, sabiendo que en el instante $t=0$ el número de bacterias en el cultivo era de 40000.

c) (0.25 puntos) ¿Cuál es el número de bacterias en el cultivo a la hora y media?

SOCIALES II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) La función $B(t)$ es creciente en el intervalo $(0,7)$, ya que su derivada es positiva en dicho intervalo, luego, no hay ningún instante en el que el número de bacterias en el cultivo comience a decrecer.

b) Calculamos la integral

$$B(t) = \int B'(t) \cdot dt = \int 50000 e^{2t} dt = 50000 \cdot \frac{1}{2} \int 2 e^{2t} dt = 25000 e^{2t} + C$$

Calculamos el valor de C , sabiendo que $B(0) = 40000$

$$B(0) = 40000 \Rightarrow 40000 = 25000 e^0 + C \Rightarrow C = 15000$$

Luego, la función es: $B(t) = 25000 e^{2t} + 15000$

c) $B(1'5) = 25000 e^{2 \cdot 1'5} + 15000 = 25000 e^3 + 15000 = 517.138$ bacterias

De una función f sabemos que su gráfica pasa por el punto $(1,3)$ y que su derivada es $f'(x) = 2x - 6$.

a) (0'75 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) (1 punto) Estudie la monotonía y la existencia de extremos de la función f .

c) (0'75 puntos) Determine la función f y represéntela gráficamente.

SOCIALES II. 2020 RESERVA 4. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = 3$$

$$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(1) = -4$$

Sustituyendo, tenemos: $y - 3 = -4 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -4x + 7$

b) Igualamos la primera derivada a cero: $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+
Función	D	C

La función es creciente en $(3, +\infty)$. Decreciente en $(-\infty, 3)$ y tiene un mínimo en $x = 3$

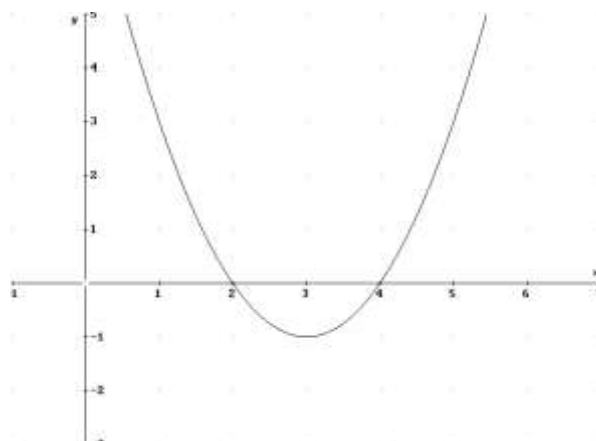
c) Calculamos la integral: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x - 6) dx = x^2 - 6x + C$

Calculamos C : $f(1) = 3 \Rightarrow 1^2 - 6 \cdot 1 + C = 3 \Rightarrow C = 8$

Luego, la función es: $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Dibujamos la función

x	$y = x^2 - 6x + 8$
Vértice $-\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$	-1
2	0
4	0
1	3
5	3



Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{si } x < -2 \\ x^2 + a & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

a) (1 punto) Calcule el valor de a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a , ¿es derivable la función f ?

b) (0'5 puntos) Para $a = -6$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

c) (1 punto) Para $a = -6$, esboce la gráfica de f y calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f , el eje de abscisas y las rectas $x = 3$ y $x = 5$

SOCIALES II. 2020 RESERVA 4. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\frac{2}{x+1}$ es continua y derivable en su dominio $\mathbb{R} - \{-1\}$. La función $x^2 + a$ al ser polinómica es continua y derivable en su dominio. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{2}{x+1} \right) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + a) = 4 + a \end{array} \right\} \Rightarrow -2 = 4 + a \Rightarrow a = -6$$

Calculamos la derivada $f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(x+1)^2} & \text{si } x < -2 \\ 2x & \text{si } x > -2 \end{cases}$

Como $f'(-2^-) = -2 \neq f'(-2^+) = -4 \Rightarrow$ No es derivable en $x = -2$

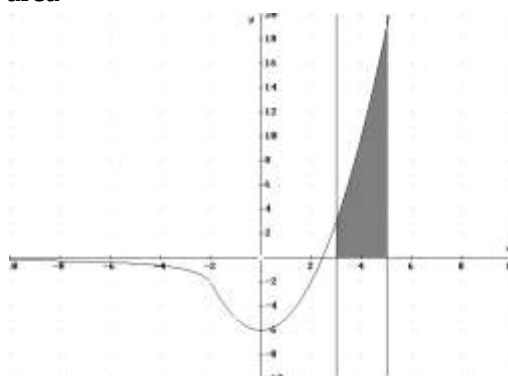
b) La ecuación de la recta tangente es: $y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3)$

$$f(3) = 3^2 - 6 = 3$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(3) = 6$$

Sustituyendo, tenemos que: $y - 3 = 6 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = 6x - 15$

c) Dibujamos y calculamos el área



$$A = \int_3^5 (x^2 - 6) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 6x \right]_3^5 = \left(\frac{125}{3} - 30 \right) - \left(\frac{27}{3} - 18 \right) = \frac{62}{3} u^2$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{a}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ a + be^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) (1'25 puntos) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.

b) (0'75 puntos) Para $a = 2$ y $b = -2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.

c) (0'5 puntos) Para $a = 2$ y $b = -2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de f , si existen.

SOCIALES II. 2020 SEPTIEMBRE. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 + \frac{a}{x-1} = 2 - a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + be^x) = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - a = a + b \Rightarrow 2a + b = 2 \text{ Por ser continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ be^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y como es derivable

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = -a \\ f'(0^+) = b \end{array} \right\} \Rightarrow -a = b \text{ Derivable en } x = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones: $\begin{cases} 2a + b = 2 \\ -a = b \end{cases} \Rightarrow a = 2 ; b = -2$

b) Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ -2e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y la igualamos a cero

Vemos que no sale ningún valor.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	-
Función	D	D

La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Luego es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$ y no tiene máximos ni mínimos.

c) Calculamos las asíntotas.

Para $x < 0$

En la función $2 + \frac{2}{x-1}$ no hay ningún valor que anule el denominador, luego no tiene

asíntota vertical.

Calculamos $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{2}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2$ es una asíntota horizontal. Al tener horizontal, no tiene oblicua.

Para $x > 0$

No tiene asíntota vertical

Calculamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - 2e^x = 2 - \infty = -\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

Calculamos la asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 2e^x}{x} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow L'Hopital = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2e^x}{1} = -\infty \Rightarrow \text{No tiene asíntota oblicua}$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & \text{si } 2 < x < 4 \\ \frac{x-3}{x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

a) (1'25 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en su dominio.

b) (0'75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

c) Calcule $\int_2^3 f(x) dx$

SOCIALES II. 2020 SEPTIEMBRE EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) La función $-x + 2$ es continua y derivable en su dominio. La función $-x^2 + 6x - 8$ es continua y derivable en su dominio. La función $\frac{x-3}{x}$ es continua y derivable en su dominio $\mathbb{R} - \{0\}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 2$ y $x = 4$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x + 2) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 6x - 8) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} (-x^2 + 6x - 8) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{x-3}{x} \right) &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \Rightarrow \text{No es continua ni derivable en } x = 4$$

Calculamos la derivada: $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } 2 < x < 4 \\ \frac{3}{x^2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= -1 \\ f'(2^+) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 2$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$.

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-	+
Función	D	C	D	C

La función es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (3, 4)$ y creciente en $(2, 3) \cup (4, +\infty)$.

Tiene un mínimo relativo (pico) en $(2, 0)$ y un máximo relativo en $(3, 1)$.

c) Calculamos la integral

$$\int_2^3 (-x^2 + 6x - 8) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 8x \right]_2^3 = \left(-\frac{27}{3} + 27 - 24 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 12 - 16 \right) = \frac{2}{3}$$