

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio B3
- Junio, Ejercicio B4
- Reserva 1, Ejercicio B3
- Reserva 1, Ejercicio B4
- Reserva 2, Ejercicio B3
- Reserva 2, Ejercicio B4
- Reserva 3, Ejercicio B3
- Reserva 3, Ejercicio B4
- Reserva 4, Ejercicio B3
- Reserva 4, Ejercicio B4
- Julio, Ejercicio B3
- Julio, Ejercicio B4

Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

a) Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

b) Represente gráficamente la función.

c) Calcule $\int f(x) dx$

d) Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

SOCIALES II. 2021. JUNIO. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

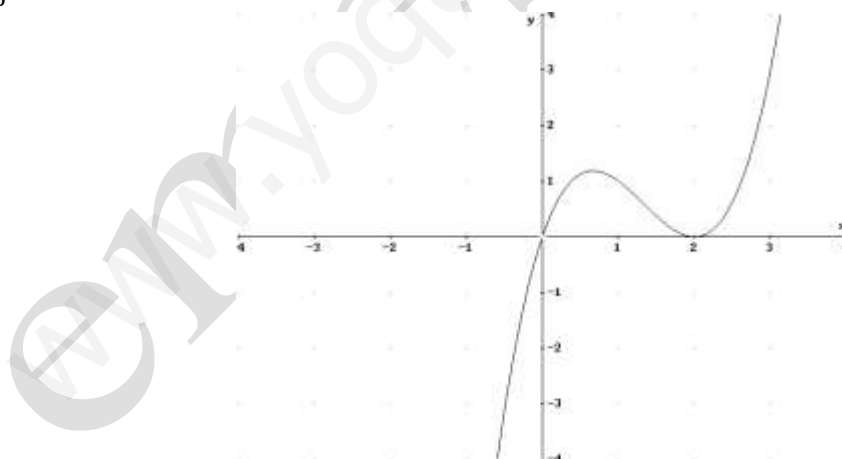
$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = \frac{2}{3}$$

	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.

Tiene un máximo relativo en $\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y un mínimo relativo en $(2, 0)$

b) Dibujamos la función



c) Calculamos la integral

$$\int (x^3 - 4x^2 + 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$$

d) Calculamos el área

$$\int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{32}{3} + 8 \right) - (0) = \frac{4}{3} u^2$$

a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad g(x) = x^3 \cdot e^{2x^2}$$

b) Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las recta $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$

SOCIALES II. 2021 JUNIO. EJERCICIO B4

RESOLUCIÓN

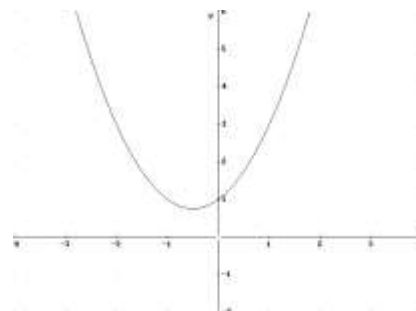
$$a) \quad f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - 1(x-1)}{\frac{(x+1)^2}{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$g'(x) = 3x^2 \cdot e^{2x^2} + 4x \cdot e^{2x^2} \cdot x^3 = e^{2x^2} \cdot [3x^2 + 4x^4]$$

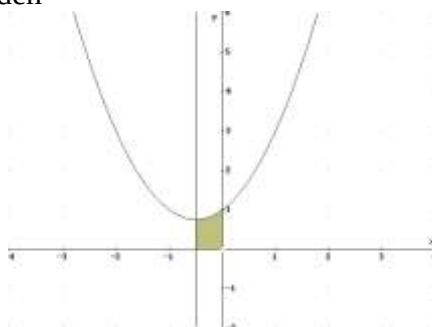
b) Corte eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución

Corte eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0,1)$

x	y = x ² + x + 1
$x_{\text{vértice}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
-1	1
0	1
-2	3
1	3



c) Calculamos el área que nos piden



$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 (x^2 + x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = 0 - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{12} u^2$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ x^2 - bx + a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Halle el valor de b para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Para $b = \frac{1}{2}$, halle el valor de a para que f sea derivable en $\mathbb{R}$.

c) Para $a < 0$ y $b = \frac{1}{2}$, estudie el crecimiento y halle las abscisas de los extremos de la función f .

d) Para $a = 0$ y $b = \frac{1}{2}$, represente la región del plano delimitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. Calcule el área de dicha región.
SOCIALES II. 2021 RESERVA 1. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x=1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b &= a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - bx + a &= 1 - b + a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = 1 - b + a \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

b) Estudiamos la derivabilidad en $x=1$. Calculamos la función derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= a \\ f'(1^+) &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

c) La función es: $f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - \frac{1}{2}x + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Si $x < 1 \Rightarrow f'(0) = a < 0 \Rightarrow$ decreciente

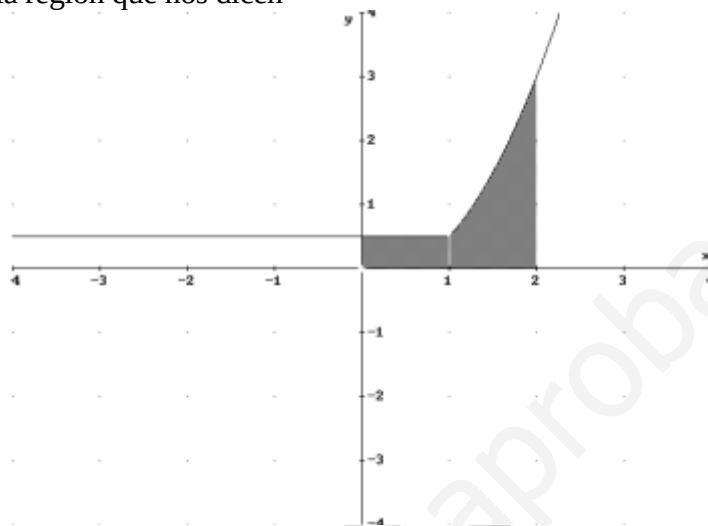
Si $x > 1 \Rightarrow 2x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow$ No está en su dominio

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+
Función	D	C

La función es creciente en $(1, +\infty)$. Decreciente en $(-\infty, 1)$ y tiene un mínimo en $\left(1, \frac{1}{2} + a\right)$

d) La función es: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - \frac{1}{2}x + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Hacemos el dibujo de la región que nos dicen



Área = Área del rectángulo + área de debajo de la función $x^2 - \frac{x}{2}$ entre 1 y 2

$$A = 1 \cdot \frac{1}{2} + \int_1^2 \left(x^2 - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{4}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} u^2$$

La cotización en bolsa de una empresa en un determinado día viene expresada, en euros, por la función $c(t)$, con $t \in [0, 24]$, medido en horas.

La variación instantánea de esta función es la derivada de c , que viene dada por $c'(t) = 0'03t^2 - 0'9t + 6$, con $t \in (0, 24)$

- Estudie los intervalos en los que la función c es creciente.
- Analice los puntos críticos de la función c , indicando en cuáles se alcanza el máximo y el mínimo relativos.
- Halle la expresión analítica de la función c , sabiendo que la cotización en bolsa de la empresa era de 50 euros en el instante inicial

SOCIALES II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a y b) Igualamos a cero la derivada: $c'(t) = 0'03t^2 - 0'9t + 6 = 0 \Rightarrow t = 10 ; t = 20$

	$(0, 10)$	$(10, 20)$	$(20, 24)$
Signo c'	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo $(0, 10) \cup (20, 24)$ y decreciente en el intervalo $(10, 20)$

Tiene un Máximo en $t = 10$ y un mínimo en $t = 20$.

c) Calculamos la integral

$$c(t) = \int (0'03t^2 - 0'9t + 6) dx = \frac{0'03t^3}{3} - \frac{0'9t^2}{2} + 6t + K$$

Sabemos que $c(0) = 50$, luego:

$$c(0) = 50 \Rightarrow \frac{0'03 \cdot 0^3}{3} - \frac{0'9 \cdot 0^2}{2} + 6 \cdot 0 + K = 50 \Rightarrow K = 50$$

Por lo tanto, la función es: $c(t) = \frac{0'03t^3}{3} - \frac{0'9t^2}{2} + 6t + 50 = 0'01t^3 - 0'45t^2 + 6t + 50$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

- a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en todo su dominio.
b) Calcule los extremos de la función f .
c) Represente el recinto que encierra la gráfica de f , las rectas $x = -1$, $x = 1$ y el eje OX. Calcule el área de dicho recinto.

SOCIALES II. 2021 RESERVA 2. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) La función $(x+1)^2$, por ser polinómica, es continua y derivable en su dominio $-2 \leq x < 0$. La función $(x-1)^2$ al ser polinómica es continua y derivable en su dominio $0 \leq x \leq 2$. Por lo tanto, estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x=0$.

Estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x=0$

$$\begin{aligned} 1. & \quad f(0) = 1 \\ 2. & \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1)^2 &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Rightarrow \text{Es continua en } x=0 \end{aligned}$$

Calculamos la derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2 \cdot (x+1) & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2 \cdot (x-1) & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 2 \\ f'(0^+) &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=0$$

Por lo tanto, la función es continua en $[-2, 2]$ y derivable en $(-2, 2) - \{0\}$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = \begin{cases} 2 \cdot (x+1) & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2 \cdot (x-1) & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$

$$2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$
Signo $f'(x)$	-	+	-	+
Función	D	C	D	C

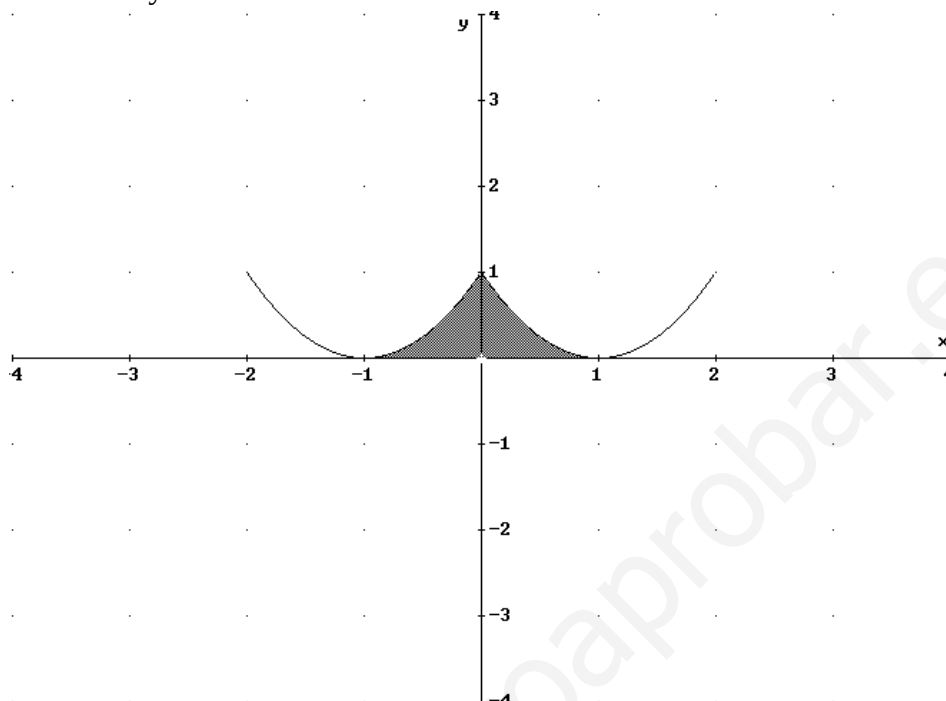
La función es creciente en $(-1, 0) \cup (1, 2)$ y decreciente en $(-2, -1) \cup (0, 1)$.

Tiene un mínimo relativo en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Tiene un pico en $(0, 1)$ no derivable.

El máximo absoluto es 1 y se alcanza en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$

El mínimo absoluto es 0 y se alcanza en $x = -1$ y $x = 1$

c) Dibujamos el recinto y calculamos su área



Como es simétrica, calculamos el área de la parte positiva y la multiplicamos por 2

$$A = 2 \cdot \int_0^1 (x-1)^2 dx = 2 \cdot \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{0}{3} \right) - 2 \cdot \left(\frac{-1}{3} \right) = \frac{2}{3} u^2$$

Sea f una función de la que sabemos que la gráfica de su derivada, f' , es una parábola con vértice en el punto $(0,8)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-4,0)$ y $(4,0)$.

1. Dibuje la gráfica de f' .

2 A partir de dicha gráfica, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , así como las abscisas de los extremos relativos de f .

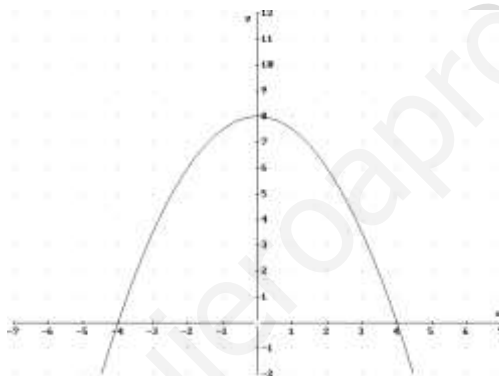
3 Sabiendo que la gráfica de f pasa por el origen de coordenadas, calcule la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcule la derivada de la función $g(x) = (-3 + x^2) \cdot e^{2x-1}$

SOCIALES II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a.1) Esbozamos la gráfica de f' con los datos que nos dan:



a.2) Viendo la gráfica se deduce que:

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 4)$	$(4, \infty)$
Signo $f'(x)$	—	+	—
Función $f(x)$	D	C	D

La función es decreciente en el intervalo: $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ y creciente en el intervalo: $(-4, 4)$.

Tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 4$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = -4$.

a.3) La recta tangente en $x = 0$, es: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$.

$$- f(0) = 0$$

$$- f'(0) = 8$$

Sustituyendo, tenemos: $y - 0 = 8 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 8x$

$$b) g(x) = (-3 + x^2) \cdot e^{2x-1}$$

$$g'(x) = 2x \cdot e^{2x-1} + (-3 + x^2) \cdot 2 \cdot e^{2x-1} = 2 \cdot e^{2x-1} (x^2 + x - 3)$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -2x + 2a & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ -2x^2 - 4a & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ -8x + b & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

a) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua en su dominio. Para esos valores, ¿es f derivable?

b) Para $a = -2$ y $b = 16$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos y absolutos.

c) Para $a = -2$ y $b = 16$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$

SOCIALES II. 2021 RESERVA 3. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x = -2$ y $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} (-2x + 2a) &= 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (-2x^2 - 4a) &= -8 - 4a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 + 2a = -8 - 4a \Rightarrow a = -2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x^2 - 4a) &= -8 + 8 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (-8x + b) &= -16 + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = -16 + b \Rightarrow b = 16$$

Calculamos la derivada $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -4 \leq x < -2 \\ -4x & \text{si } -2 < x < 2 \\ -8 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

Como $f'(-2^-) = -2 \neq f'(-2^+) = 8 \Rightarrow$ No es derivable en $x = -2$

Como $f'(2^-) = -8 \neq f'(2^+) = -8 \Rightarrow$ Si es derivable en $x = 2$

b) $f'(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ -2x^2 + 8 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ -8x + 16 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases} ; f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -4 \leq x < -2 \\ -4x & \text{si } -2 < x < 2 \\ -8 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

Igualamos la derivada a cero $-4x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-4, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$
Signo $f'(x)$	-	+	-	-
Función	D	C	D	D

La función es decreciente en $(-4, -2) \cup (0, 2) \cup (2, 3)$ y creciente en $(-2, 0)$.

Tiene un máximo relativo en $(0, 8)$ y un mínimo relativo en $(-2, 0)$

Calculamos los valores en los extremos de la función: $f(-4) = 4$; $f(3) = -8$

Luego, el máximo absoluto es 8 y se alcanza en $x=0$. El mínimo absoluto es -8 y se alcanza en $x=3$.

c) Calculamos el área:
$$A = \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^2 = \left(-\frac{16}{3} + 16 \right) - \left(\frac{16}{3} - 16 \right) = \frac{64}{3} u^2$$

a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = (5x^3 + 4x - 2)^4 \cdot \ln(2x^5 - 4x^3 + x) \quad g(x) = \frac{e^{3x^2 - 5x}}{(6x^2 + 2)^3}$$

b) Halle la función $h(x)$, sabiendo que su derivada $h'(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ y que $h(2) = \frac{11}{3}$

SOCIALES II. 2021 RESERVA 3. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

$$a) \quad f'(x) = 4(5x^3 + 4x - 2)^3 \cdot (15x^2 + 4) \cdot \ln(2x^5 - 4x^3 + x) + \frac{10x^4 - 12x^2 + 1}{2x^5 - 4x^3 + x} \cdot (5x^3 + 4x - 2)^4$$

$$g'(x) = \frac{(6x - 5) \cdot e^{3x^2 - 5x} \cdot (6x^2 + 2)^3 - e^{3x^2 - 5x} \cdot 3 \cdot (6x^2 + 2)^2 \cdot 12x}{(6x^2 + 2)^6} = \frac{e^{3x^2 - 5x} \cdot [36x^3 - 30x^2 - 24x - 10]}{(6x^2 + 2)^4}$$

b) Hacemos la integral

$$h(x) = \int (4x^3 + x^2 - 4x - 1) dx = 4 \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} - x + C = x^4 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - x + C$$

Y como $h(2) = \frac{11}{3}$, tenemos que:

$$\frac{11}{3} = 2^4 + \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 - 2 + C = 16 + \frac{8}{3} - 8 - 2 + C \Rightarrow C = -5$$

Luego, la función que nos piden es: $h(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - x - 5$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ -3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f en todo su dominio.
b) Represente gráficamente la función f .
c) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f , el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

SOCIALES II. 2021 RESERVA 4. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\frac{1}{x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. Las funciones $-3x^2 + 4$ y $2x - 1$, por ser polinomios, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, debemos estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = -1$ y $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (-3x^2 + 4) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Rightarrow \text{No es continua en } x = -1 \text{ y, por lo tanto, no}$$

derivable.

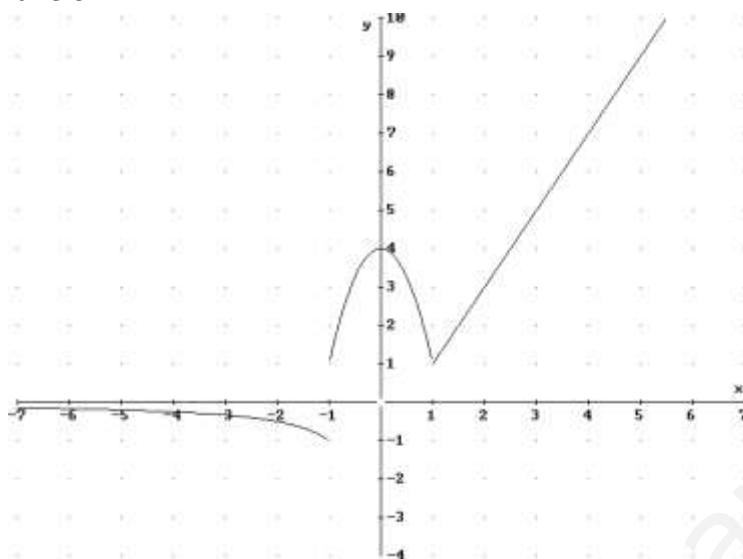
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (-3x^2 + 4) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 1.$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{si } x < -1 \\ -6x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -6 \\ f'(1^+) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 1$$

Luego la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

b) Representamos la función



c) Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_0^1 (-3x^2 + 4) dx + \int_1^3 (2x - 1) dx = \left[-3\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^1 + \left[2\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \left[-x^3 + 4x \right]_0^1 + \left[x^2 - x \right]_1^3 =$$

$$= (-1 + 4) - 0 + (9 - 3) - (1 - 1) = 9 \text{ u}^2$$

Una fábrica estima que sus costes de producción, expresados en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = x^2 - 6x + 10$, donde x es la cantidad semanal a producir expresada en miles de kilogramos.

- a) ¿Cuál debe ser la producción semanal para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es dicho coste?
b) Calcule la recta tangente a la función de costes en el punto de abscisa $x = 4$. Represente gráficamente la función de costes y la recta tangente hallada.

SOCIALES II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+
Función	D	C

La función es decreciente en $(-\infty, 3)$ y creciente en $(3, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(3, 1)$

Luego, para que el coste sea mínimo, la producción semanal debe ser de 3.000 kilogramos y el coste sería de 1.000 euros.

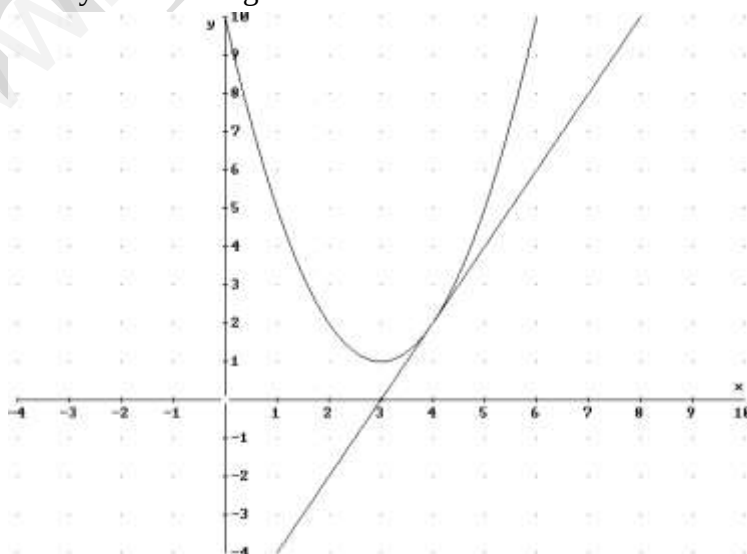
- b) Calculamos la recta tangente en $x = 4$.

$$f(4) = 16 - 24 + 10 = 2$$

$$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(4) = 8 - 6 = 2$$

Luego, la recta tangente es: $y - f(4) = f'(4) \cdot (x - 4) \Rightarrow y - 2 = 2 \cdot (x - 4) \Rightarrow y = 2x - 6$

Representamos la función y la recta tangente



Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo.

c) Calcule $\int_{-2}^2 f(x) dx$

SOCIALES II. 2021 JULIO. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) La función 2^{x+1} es continua y derivable en su dominio. La función $x^2 - 2x$ al ser polinómica es continua y derivable en su dominio. Por lo tanto, estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x=0$.

Estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x=0$

$$2. \quad f(0) = 0$$

$$2. \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{x+1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No } \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Por lo tanto, la función no es continua en $x=0$. Al no ser continua en $x=0$, tampoco es derivable. Luego, la función es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = \begin{cases} 2^{x+1} \cdot \ln 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1)$.

Tiene un mínimo en $(1, -1)$.

c) Calculamos la integral que nos piden

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^0 2^{x+1} dx + \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{2^{x+1}}{\ln 2} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = \left(\frac{2}{\ln 2} \right) - \left(\frac{2^{-1}}{\ln 2} \right) + \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = \\ &= \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{4}{3} = \frac{3}{2 \ln 2} - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t - 0'3 & \text{si } 0'2 \leq t \leq 1'8 \\ 0'1t - 0'12 & \text{si } 1'8 < t \leq 5 \\ -0'5t^2 + 8'3t - 28'62 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

En donde t es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio

b) ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es su número?.

SOCIALES II. 2021. JULIO. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x=1'8$ y en $x=5$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1'8^-} (-t^2 + 2t - 0'3) &= 0'06 \\ \lim_{x \rightarrow 1'8^+} (0'1t - 0'12) &= 0'06 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1'8) = \lim_{x \rightarrow 1'8} f(x) = 0'06 \Rightarrow \text{Continua en } x=1'8$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} (0'1t - 0'12) &= 0'38 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} (-0'5t^2 + 8'3t - 28'62) &= 0'38 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(5) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0'38 \Rightarrow \text{Continua en } x=5$$

Calculamos la función derivada: $f'(t) = \begin{cases} 2t + 2 & \text{si } 0'2 \leq t < 1'8 \\ 0'1 & \text{si } 1'8 < t < 5 \\ -t + 8'3 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=1'8$:

$$\left. \begin{aligned} f'(1'8^-) &= -1'6 \\ f'(1'8^+) &= 0'1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1'8^-) \neq f'(1'8^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=1'8$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=5$:

$$\left. \begin{aligned} f'(5^-) &= 0'1 \\ f'(5^+) &= 3'3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(5^-) \neq f'(5^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=5$$

Luego, la función es continua en su dominio y derivable en $(0'2, 1'8) \cup (1'8, 5) \cup (5, 10)$

b) Igualamos la derivada a cero $\begin{cases} -2t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \\ -t + 8'3 = 0 \Rightarrow t = 8'3 \end{cases}$

	$(0'2, 1)$	$(1, 1'8)$	$(1'8, 5)$	$(5, 8'3)$	$(8'3, 10)$
Signo $f'(t)$	+	-	+	+	-
Función $f(t)$	C	D	C	C	D

Tenemos dos máximos relativos en $(1, 0'7)$ y $(8'3, 5'825)$. El máximo absoluto es para $t = 8'3$ y corresponde a 5825 personas.