

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^2 - B \cdot C^t$.

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = 2 \cdot C$.

SOCIALES II. 2011 JUNIO. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

$$a) A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

b)

$$A \cdot X + B = 2C \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 10 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a-5d & 2b-5e & 2c-5f \\ a-3d & b-3e & c-3f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a-5d = -1 \\ a-3d = -2 \\ 2b-5e = 5 \\ b-3e = 9 \\ 2c-5f = 4 \\ c-3f = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$a = 7 ; b = -30 ; c = -13 ; d = 3 ; e = -13 ; f = -6$$

Luego, la matriz es $X = \begin{pmatrix} 7 & -30 & -13 \\ 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}$

a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $N^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, razone cuáles de las siguientes

operaciones tienen sentido y efectúa las que puedan realizarse: $M + N^t$, $M^t \cdot N$, $M \cdot N$.

b) Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno, A, B y C. Se han anotado en la matriz P los pesos, en Kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el Kg de cada producto final:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{natural} \\ \text{descafeinado} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{natural} \\ \text{descafeinado} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2.20 & 2.75 & 2.50 \\ 3.20 & 3.90 & 3.60 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Efectúe el producto $P \cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante.

SOCIALES II. 2011 RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) $M + N^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$M^t \cdot N$ No se puede multiplicar ya que el número de columnas de la primera matriz no es igual al número de filas de la segunda matriz.

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$P \cdot Q^t = \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.20 & 3.20 \\ 2.75 & 3.90 \\ 2.50 & 3.60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2910 & 4184 \\ 1372 & 1972 \end{pmatrix}$$

El elemento $a_{11} = 2910$ son los euros que ha pagado por todo el café natural adquirido.

El elemento $a_{22} = 1972$ son los euros que ha pagado por todo el café descafeinado adquirido.

Sean las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Resuelva la ecuación matricial $2 \cdot X - C \cdot D = (I_3 + D) \cdot C$.

b) Si las matrices C y D son las matrices de adyacencia de dos grafos, de vértices a, b, c y 1, 2, 3, respectivamente, haga la representación gráfica de dichos grafos.

SOCIALES II. 2011 RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCION A

RESOLUCIÓN

a) Calculamos: $C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

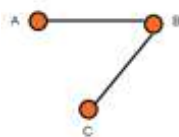
$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial:

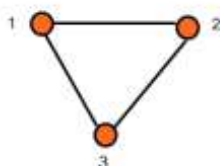
$$2 \cdot X - C \cdot D = (I_3 + D) \cdot C \Rightarrow X = \frac{1}{2} (C + D \cdot C + C \cdot D) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La matriz $C = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$ su grafo es:



La matriz $D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$ su grafo es



- a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $(I_3 - A)^3$.
- b) Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, determine a y b de manera que $B \cdot C - D = O$ siendo O la matriz nula.
- SOCIALES II. 2011 RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCION A**

RESOLUCIÓN

a) Calculamos: $I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(I_3 - A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I_3 - A)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial:

$$B \cdot C - D = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1+3a-5 \\ -b+9-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2 ; b = -1$$

a) De una matriz cuadrada, A , de orden 3 se conocen los siguientes elementos

$$a_{12} = a_{21} = -2 ; a_{13} = a_{31} = 0 ; a_{23} = a_{32} = 1$$

Determine los demás elementos de la matriz A sabiendo que debe cumplirse la ecuación

$$A \cdot B = C^t, \text{ donde } B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Calcule $2D^2$, siendo $D = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

SOCIALES II. 2011 RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos y resolvemos la ecuación que nos dan.

$$A \cdot B = C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ -2 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2 \\ -2-b+1 \\ -1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -6 ; b = -3 ; c = 0$$

b) Calculamos

$$2D^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -14 & 20 \\ -12 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 40 \\ -24 & 20 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Efectúe, si es posible, los siguientes productos: $A \cdot A^t$; $A^t \cdot A$; $A \cdot B$.

b) Resuelva la siguiente ecuación matricial $A \cdot A^t \cdot X = B$.

SOCIALES II. 2011 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

$$a) A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda.}$$

b)

$$A \cdot A^t \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -1 \\ 2c = 1 \\ 2d = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$