

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Obtenga a y b sabiendo que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica?

b) Para los valores $a = 3$ y $b = 1$ calcule la matriz X tal que $A \cdot B = 2(X - 3I_2)$.

SOCIALES II. 2013 JUNIO. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4-a = 5 \\ -2-b = -2 \\ 2a+ab = -2 \\ -a+b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1; b = 0$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es simétrica, ya que: $A = A^t$

b) Calculamos la matriz que nos piden:

$$A \cdot B = 2(X - 3I_2) \Rightarrow A \cdot B = 2X - 6I_2 \Rightarrow X = \frac{1}{2}(A \cdot B + 6I_2)$$

$$X = \frac{1}{2}(A \cdot B + 6I_2) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y A^{2013} .

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + I_2 = 5B^t - A^2$.

SOCIALES II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos A^2 y A^{2013}

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$A^{2013} = A^{2012} \cdot A = (A^2)^{1006} \cdot A = (I_2)^{1006} \cdot A = I_2 \cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{aligned} A \cdot X + I_2 &= 5B^t - A^2 \Rightarrow A \cdot X = 5B^t - A^2 - I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Resuelva, si es posible, la ecuación matricial $B \cdot A + 2X = C$.

SOCIALES II. 2013 RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Realizamos la operación:

$$B \cdot A + 2X = C \Rightarrow X = \frac{1}{2}(C - B \cdot A) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} =$$

a) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Determine la matriz X que verifica $B \cdot X = 3A + A^t$.

b) Calcule la matriz Y que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$

SOCIALES II. 2013 RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$B \cdot X = 3A + A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2a+c=12 \\ 3a+2c=16 \\ 2b+d=8 \\ 3b+2d=8 \end{array} \right\} \Rightarrow a=8; b=8; c=-4; d=-8 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+5b \\ a-5b \\ 2a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2a+5b=6 \\ a-5b=-12 \\ 2a-b=-6 \end{array} \right\} \Rightarrow a=-2; b=2 \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^3 .

b) Determine la matriz X para que $A \cdot X + B \cdot C = D$

SOCIALES II. 2013 RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 & 144 \\ 144 & 233 \end{pmatrix}$$

b)

$$A \cdot X + B \cdot C = D \Rightarrow A \cdot X = D - B \cdot C \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+3b \\ 3a+5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2a+3b=-4 \\ 3a+5b=-3 \end{cases} \Rightarrow a=-11; b=6 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $(2A + B) \cdot X = 3A - B$.

b) Determine en cada caso las dimensiones de la matriz D para que se puedan realizar las siguientes operaciones: $C \cdot D + A$, $C^t \cdot D \cdot C$, $D \cdot C^t$, $C \cdot D \cdot C^t$.

SOCIALES II. 2013 SEPTIEMBRE EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación matricial

$$(2A + B) \cdot X = 3A - B \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{6}{5} & \frac{9}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ b - d = 1 \\ 2c = -2 \\ 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1; b = \frac{3}{2}; c = -1; d = \frac{1}{2}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) Calculamos la dimensión de la matriz D en cada caso

$C \cdot D + A \Rightarrow (2, 3) \cdot D + (2, 2) \Rightarrow$ La matriz D es de orden $(3, 2)$

$C^t \cdot D \cdot C \Rightarrow (3, 2) \cdot D \cdot (2, 3) \Rightarrow$ La matriz D es de orden $(2, 2)$

$D \cdot C^t \Rightarrow D \cdot (3, 2) \Rightarrow$ La matriz D es de orden $(x, 3)$, es decir, puede tener cualquier número de filas y 3 columnas.

$C \cdot D \cdot C^t \Rightarrow (2, 3) \cdot D \cdot (3, 2) \Rightarrow$ La matriz D es de orden $(3, 3)$