

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A

Las filas de la matriz P indican los respectivos precios de tres artículos A_1 , A_2 y A_3 en dos

comercios, C_1 (fila 1) y C_2 (fila 2): $P = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix}$

Cati desea comprar 2 unidades del artículo A_1 , 1 de A_2 y 3 de A_3

Manuel desea comprar 5 unidades del artículo A_1 , 1 de A_2 y 1 de A_3

Han dispuesto esas compras en la matriz Q : $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule $P \cdot Q^t$ y $Q \cdot P^t$ e indique el significado de los elementos de las matrices resultantes.

b) A la vista de lo obtenido en el apartado anterior, ¿dónde les interesa hacer la compra a cada uno?

SOCIALES II. 2016 JUNIO. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

Nota aclaratoria: En el enunciado del problema hay una pequeña errata. Dice: “Las **filas** de la matriz P ...” cuando en realidad debe decir: “Las **columnas** de la matriz P ...”

a) Calculamos

$$P \cdot Q^t = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 160 \\ 122 & 157 \end{pmatrix}$$

El elemento $a_{11} = 115$ representa el precio de los artículos en el supermercado C_1 por los artículos que desea comprar Cati.

El elemento $a_{12} = 160$ representa el precio de los artículos en el supermercado C_1 por los artículos que desea comprar Manuel.

El elemento $a_{21} = 122$ representa el precio de los artículos en el supermercado C_2 por los artículos que desea comprar Cati.

El elemento $a_{22} = 157$ representa el precio de los artículos en el supermercado C_2 por los artículos que desea comprar Manuel.

Calculamos

$$Q \cdot P^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 20 & 25 \\ 15 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 122 \\ 160 & 157 \end{pmatrix}$$

El elemento $b_{11} = 115$ representa los artículos de Cati por el precio en el supermercado C_1 .

El elemento $b_{12} = 122$ representa los artículos de Cati por el precio en el supermercado C_2 .

El elemento $b_{21} = 160$ representa los artículos de Manuel por el precio en el supermercado C_1 .

El elemento $b_{22} = 157$ representa los artículos de Manuel por el precio en el supermercado C_2 .

b) Según lo calculado en el apartado anterior, vemos que a Cati le interesa comprar en el supermercado C_1 y a Manuel en el supermercado C_2

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y A^{2016} .

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X - B = C^t$.

SOCIALES II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos A^2 y A^{2016}

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = I$$

Por lo tanto: $A^{2016} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{aligned} A \cdot X - B &= C^t \Rightarrow A \cdot X = C^t + B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ -d & -e & -f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Resuelva la ecuación matricial $C \cdot B \cdot X - 2A \cdot X = A^t$.

b) Analice cuáles de las siguientes operaciones, sin efectuarlas, se pueden realizar y justifique las respuestas: $B \cdot C + 2A$, $A \cdot C + C$, $B^t \cdot C$, $C \cdot B - A$.

SOCIALES II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a+3c & -b+3d \\ 3a-3c & 3b-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+3c=1 \\ 3a-3c=2 \\ -b+3d=0 \\ 3b-3d=-3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2}; b = -\frac{3}{2}; c = \frac{5}{6}; d = -\frac{1}{2}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b)

$B_{(3,2)} \cdot C_{(2,3)} + 2A_{(2,2)} \Rightarrow$ No se puede, ya que $B \cdot C$ es una matriz (3,3) y no se puede sumar con una matriz (2,2).

$A_{(2,2)} \cdot C_{(2,3)} + C_{(2,3)} \Rightarrow (2,3)$ Si se puede, ya que $A \cdot C$ es una matriz (2,3) y se puede sumar con otra matriz (2,3).

$B^t_{(2,3)} \cdot C_{(2,3)} \Rightarrow$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

$C_{(2,3)} \cdot B_{(3,2)} - A_{(2,2)} \Rightarrow (2,2)$ Si se puede, ya que $C \cdot B$ es una matriz (2,2) y se puede restar con otra matriz (2,2).

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot (B \cdot B^t) = \frac{1}{2}A - 2A^t$.

b) Razone cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse e indique, en su caso, la dimensión de la matriz resultante: $A \cdot B$, $A \cdot B^t$, $B \cdot A^{-1}$, $B^t \cdot A + A^{-1}$

SOCIALES II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+b & a+5b \\ 2c+d & c+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-3 \\ a+5b=6 \\ 2c+d=-9 \\ c+5d=9 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{7}{3}; b = \frac{5}{3}; c = -6; d = 3$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

b)

$A_{(2,2)} \cdot B_{(2,3)} \Rightarrow (2,3)$ Si se puede y la matriz resultante es de orden (2,3).

$A_{(2,2)} \cdot B^t_{(3,2)} \Rightarrow$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz es distinto del número de filas de la segunda matriz.

$B_{(2,3)} \cdot A^{-1}_{(2,2)} \Rightarrow$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz es distinto del número de filas de la segunda matriz.

$B^t_{(3,2)} \cdot A_{(2,2)} + A^{-1}_{(2,2)} \Rightarrow$ No se puede, ya que $B^t \cdot A$ es una matriz (3,2) y no se puede sumar con una matriz (2,2).

a) Si A es una matriz de dimensión $m \times n$, indique la dimensión de una matriz X si se verifica que $(A^t \cdot A) \cdot X = I_n$.

b) Calcule dicha matriz X en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Calcule, si es posible, el producto $A \cdot (A^t \cdot A)$.

SOCIALES II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^t_{(n,m)} \cdot A_{(m,n)} = B_{(n,n)}$$

$$B_{(n,n)} \cdot X_{(n,a)} = I_{(n,n)} \Rightarrow X_{(n,n)}$$

Luego, la matriz X es una matriz cuadrada de orden n

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+c=1 \\ a+3c=0 \\ 3b+d=0 \\ b+3d=1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{8}; b = -\frac{1}{8}; c = -\frac{1}{8}; d = \frac{3}{8}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y en dichos casos calcule el resultado: $A \cdot B$, $B \cdot A$, $B \cdot C$ y $C^t \cdot B^t$.

b) Calcule la matriz X en la ecuación $A \cdot X + B^t = 4C$.

SOCIALES II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a)

$A_{(2,2)} \cdot B_{(1,2)} \Rightarrow$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz es distinto del número de filas de la segunda matriz.

$$B_{(1,2)} \cdot A_{(2,2)} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$B_{(1,2)} \cdot C_{(2,1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

$$C^t_{(1,2)} \cdot B^t_{(2,1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}.$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a \\ a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a \\ a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}; b = -\frac{19}{6}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 3 \\ -\frac{19}{6} \end{pmatrix}$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $A^2 \cdot X + C = 2B$

b) ¿Qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que las matrices $(B+C) \cdot P$ y $B \cdot Q \cdot C^t$ sean cuadradas?.

SOCIALES II. 2016 SEPTIEMBRE EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a-4d & -b-4e & -c-4f \\ 2a+7d & 2b+7e & 2c+7f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow a=59; b=-33; c=58; d=-16; e=9; f=-16$$

Luego la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} 59 & -33 & 58 \\ -16 & 9 & -16 \end{pmatrix}$

b) La matriz P tiene de dimensión $(3,2)$, para que la matriz resultante sea cuadrada de dimensión 2
La matriz Q tiene de dimensión $(3,3)$, para que la matriz resultante sea cuadrada de dimensión 2