EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Ponencia 1
- Ponencia 2
- Ponencia 3
- Ponencia 4
- Ponencia 5
- Ponencia 6
- Ponencia 7
- Ponencia 8

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Razone si la matriz A es simétrica.

b) Calcule A^{-1}.

c) Resuelva la ecuación matricial $2X\cdot A-A^2-3I_3=O$

SOCIALES II. 2019 JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Una matriz cuadrada es simétrica si se cumple que $A=A^t$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ A^t=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ Luego no es simétrica.

b) Calculamos la inversa

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$2X\cdot A-A^2-3I_3=O\Rightarrow 2X\cdot A\cdot A^{-1}-A^2\cdot A^{-1}-3I_3\cdot A^{-1}=O\cdot A^{-1}\Rightarrow 2X-A-3\cdot A^{-1}=O\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2X=A+3\cdot A^{-1}\Rightarrow X=\frac{1}{2}\left(A+3\cdot A^{-1}\right)$$

$$X=\frac{1}{2}\left(A+3\cdot A^{-1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

$$A+B\cdot C \qquad A\cdot C+B\cdot D^t \qquad B^2+C\cdot D \qquad A+D\cdot C$$

b) Resuelva la ecuación matricial $X\cdot\left(A+I_2\right)=3B^t$.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a)

$A_{(2,2)}+B_{(2,2)}\cdot C_{(2,1)} \Rightarrow$ No se puede, ya que la matriz resultante de $B\cdot C$ es una matriz de orden $(2,1)$ y no se puede sumar con A que es de orden $(2,2)$.

$$A\cdot C+B\cdot D^t=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ -17 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$B^2+C\cdot D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

$A_{(2,2)}+D_{(1,2)}\cdot C_{(2,1)} \Rightarrow$ No se puede, ya que la matriz resultante de $D\cdot C$ es una matriz de orden $(1,1)$ y no se puede sumar con A que es de orden $(2,2)$.

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 4a-6b & -a+2b \\ 4c-6d & -c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} 4a-6b=6 \\ -a+2b=-6 \\ 4c-6d=0 \\ -c+2d=6 \end{array}\right\}\Rightarrow a=-12\ ;\ b=-9\ ;\ c=18\ ;\ d=12$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} -12 & -9 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$

Se consideran las matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 5\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) Resuelva la ecuación matricial $A^4X=B^2+I_2$.

b) ¿Tiene inversa la matriz *C*? Justique la respuesta.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos

$$A^2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 5\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 5\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=(-I)\cdot(-I)=I$$

Luego:

$$A^4X=B^2+I_2\Rightarrow I\cdot X=B^2+I_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=B^2+I_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de la matriz *C*

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=1-1=0$$

Luego, no tiene inversa ya que su determinante vale 0.

Se consideran las matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $\boldsymbol{A\cdot B-C}$? Justifique la respuesta y, en caso afirmativo, calcule $\boldsymbol{(A\cdot B-C)^{-1}}$.

b) Resuelva la ecuación matricial $\boldsymbol{A\cdot B\cdot X-C\cdot X=C^t}$.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz

$$A\cdot B-C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz.

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-6+8=2\neq 0\Rightarrow \text{ Si tiene inversa}$$

Calculamos la inversa

$$(A\cdot B-C)^{-1}=\frac{\left((A\cdot B-C)^d\right)^t}{|A\cdot B-C|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$A\cdot B\cdot X-C\cdot X=C^t\Rightarrow (A\cdot B-C)\cdot X=C^t\Rightarrow (A\cdot B-C)^{-1}\cdot(A\cdot B-C)\cdot X=(A\cdot B-C)^{-1}\cdot C^t\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X=(A\cdot B-C)^{-1}\cdot C^t$$

$$X=(A\cdot B-C)^{-1}\cdot C^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Justifique que la matriz A tiene inversa y calcule A^{-1}.
b) Calcule, si existe, la matriz X que satisface la ecuación matricial $A\cdot X=B$.
SOCIALES II. 2019 RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-2-1-3-6+1-1=-12$$

Luego, como el determinante es distinto de 0 si tiene inversa.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}^t}{-12}=\frac{\begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-12}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

b) $A\cdot X=B \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

a) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A\cdot A^t$ **es una matriz simétrica**

2) $A\cdot A^t+B$ **posee inversa**

b) Resuelva la ecuación matricial $B\cdot X+A=C$

SOCIALES II. 2019 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a.1.) Calculamos la matriz $D=A\cdot A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Vemos que es simétrica, ya que: $D=D^t=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Luego, la afirmación es cierta

a.2.) Calculamos la matriz $E=A\cdot A^t+B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Vemos que no tiene inversa, ya que $|E|=0$. Luego, la afirmación es falsa

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$B\cdot X+A=C\Rightarrow B\cdot X=C-A\Rightarrow B^{-1}\cdot B\cdot X=B^{-1}(C-A)\Rightarrow X=B^{-1}(C-A)$$

Calculamos $B^{-1}=\dfrac{(B^d)^t}{|B|}=\dfrac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^t}{-6}=\dfrac{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-6}=-\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$X=B^{-1}(C-A)=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 18 & 36 \\ 12 & -18 & 48 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la inversa de $(A\cdot A^t)$.

b) ¿Admite inversa la matriz $(A^t\cdot A)$?.

c) Calcule, cuando sea posible: $A\cdot B$, $B\cdot A$, $A^t\cdot B$, $B\cdot A^t$

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $A\cdot A^t$

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la inversa de $A\cdot A^t$.

$$(A\cdot A^t)^{-1}=\frac{((A\cdot A^t)^d)^t}{|A\cdot A^t|}=\frac{\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}^t}{6}=\frac{\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}}{6}=\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

b) Calculamos $A^t\cdot A$

$$A^t\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante

$$|A^t\cdot A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix}=65+48+48-45-52-64=0\Rightarrow \text{No tiene inversa}$$

c)

$A_{(2,3)}\cdot B_{(2,2)}$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

$$B_{(2,2)}\cdot A_{(2,3)}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^t_{(3,2)}\cdot B_{(2,2)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$B_{(2,2)}\cdot A^t_{(3,2)}$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

Consideremos la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2+m \end{pmatrix}$, siendo m un parámetro real. Se pide:

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A?
b) Para $m=0$, calcule la matriz inversa de A.
c) Para $m=0$ en la matriz A, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A=2C$, siendo $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2+m \end{vmatrix}=2m^2+2m-4=0\Rightarrow m=1\ ;\ m=-2$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de $m\neq 1\ y\ -2$, ya que $|A|\neq 0$

b) Vamos a calcular la inversa de A.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^t}{-4}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}{-4}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$X\cdot A=2C\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=2C\cdot A^{-1}\Rightarrow X=2C\cdot A^{-1}$$

Calculamos la matriz X

$$X=21C\cdot A^{-1}=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Es invertible la matriz $B+2I_2$**?. Justifique la respuesta y, en caso afirmativo calcule** $(B+2I_2)^{-1}$

b) Resuelva la ecuación matricial $A^2+X\cdot B+2X=3B^t$.

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $B+2I_2=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante.

$$\left|B+2I_2\right|=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-3\neq 0\Rightarrow \text{Si tiene inversa}$$

Calculamos la inversa de la matriz $B+2I_2$

$$(B+2I_2)^{-1}=\frac{((B+2I_2)^d)^t}{\left|B+2I_2\right|}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^t}{-3}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-3}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$A^2+X\cdot B+2X=3B^t\Rightarrow X\cdot B+2X=3B^t-A^2\Rightarrow X\cdot(B+2I)=3B^t-A^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X\cdot(B+2I)\cdot(B+2I)^{-1}=(3B^t-A^2)\cdot(B+2I)^{-1}\Rightarrow X=(3B^t-A^2)\cdot(B+2I)^{-1}$$

Calculamos la matriz

$$(3B^t-A^2)=3\cdot\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=(3B^t-A^2)\cdot(B+2I)^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -\frac{8}{3} \\ -3 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$**.**

a) Calcule su determinante y el valor o los valores del parámetro m **para los que existe la inversa de la matriz** A**.**

b) Para $m=-1$**, calcule** A^{-1}**.**

c) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X = A + I_3$

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 4

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{vmatrix}=4-2m^2+4-4m-4+2m=-2m^2-2m+4=0 \Rightarrow m=-2 \ ; \ m=1$$

Luego, para $m \neq -2 \ \ y \ \ 1$, la matriz A tiene inversa, ya que $|A| \neq 0$.

b) Calculamos la inversa

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t}{4}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}}{4}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$A\cdot X = A+I_3 \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot A + A^{-1}\cdot I_3 \Rightarrow X = I_3 + A^{-1}$$

Calculamos la matriz X

$$X = I_3 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se considera la ecuación matricial $A \cdot X = A^t \cdot B$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X?.
b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = A^t \cdot B$
SOCIALES II. 2019 PONENCIA 5

R E S O L U C I Ó N

a) $A_{(3,3)} \cdot X = A^t{}_{(3,3)} \cdot B_{(3,1)} \Rightarrow$ La matriz X debe ser $(3,1)$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$A \cdot X = A^t \cdot B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A^t \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot A^t \cdot B$$

Calculamos la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = A^{-1} \cdot A^t \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & -8 \\ 6 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Se consideran las siguientes matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\\3&0\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}$.

a) Indique razonadamente cuáles de las siguientes matrices posee inversa, calculando dicha inversa cuando sea posible: A, B, $C\cdot C^t$.

b) Calcule, si existe, una matriz X **que satisfaga la ecuación** $A\cdot X=D$

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 6

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz A si tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de 0
Calculamos la inversa de A

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&1&-3\\-3&-3&3\\-4&2&0\end{pmatrix}^t}{-6}=\frac{\begin{pmatrix}1&-3&-4\\1&-3&2\\-3&3&0\end{pmatrix}}{-6}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}1&-3&-4\\1&-3&2\\-3&3&0\end{pmatrix}$$

La matriz B no tiene inversa pues no es cuadrada.

La matriz $C\cdot C^t=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&3\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1&6\\-1&1&0\\6&0&9\end{pmatrix}$

No tiene inversa ya que: $|C\cdot C^t|=\begin{vmatrix}5&-1&6\\-1&1&0\\6&0&9\end{vmatrix}=45-36-9=0$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$A\cdot X=D\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot D\Rightarrow X=A^{-1}\cdot D$$

Calculamos la matriz X

$$X=A^{-1}\cdot D=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}1&-3&-4\\1&-3&2\\-3&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-6\\12\\-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Obtenga los valores de m **y** n **para que** A **coincida con su traspuesta y no tenga inversa.**

b) Para $m=0$ **y** $n=3$**, obtenga** A^{-1}**.**

c) Para $m=0$ **y** $n=3$**, resuelva la ecuación matricial** $X\cdot A+2I_3=A^2$

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 7

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A=A^t\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow m=-1$$

$$A \text{ no tiene inversa } \Rightarrow |A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2n-1-1-n-2-1=0\Rightarrow n=5$$

b) Calculamos la inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$X\cdot A+2I_3=A^2\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}+2I_3\cdot A^{-1}=A^2\cdot A^{-1}\Rightarrow X+2A^{-1}=A\Rightarrow X=A-2A^{-1}$$

Calculamos la matriz X

$$X=A-2A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 6 & -8 \\ 2 & 2 & -2 \\ -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{m} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

a) Determine el valor de *m* para los que la matriz *A* no tiene inversa.

b) Para $m=0$, obtenga A^{-1}.

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 8

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A \text{ no tiene inversa} \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4+3m+m^2=0 \Rightarrow m=1\ ;\ m=-4$$

Luego, la matriz A no tiene inversa para $m=1$ **y** $m=-4$

b) Calculamos la inversa de $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^t}{-4}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}}{-4}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$