

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio A1
- Reserva 1, Ejercicio A2
- Reserva 2, Ejercicio A2
- Reserva 3, Ejercicio A2
- Reserva 4, Ejercicio A1
- Septiembre, Ejercicio A1

Sean A, B, X, Y matrices invertibles que verifican: $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

a) (1 punto) Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) (1'5 puntos) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y .

SOCIALES II. 2020 JUNIO. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Sustituimos la primera ecuación en la segunda

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot X = B \\ B \cdot Y = A \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot X \cdot Y = A$$

Multiplicamos los dos términos por A^{-1} a la izquierda

$$A \cdot X \cdot Y = A \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot Y = A^{-1} \cdot A \Rightarrow X \cdot Y = I$$

Multiplicamos los dos términos por Y^{-1} a la derecha

$$X \cdot Y = I \Rightarrow X \cdot Y \cdot Y^{-1} = I \cdot Y^{-1} \Rightarrow X = Y^{-1}$$

b) Resolvemos las ecuaciones matriciales

$$\begin{aligned} A \cdot X = B &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+2c=2 \\ a+3c=0 \\ b+2d=1 \\ b+3d=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow a=6; b=5; c=-2; d=-2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cdot Y = A &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a+c=1 \\ -c=1 \\ 2b+d=2 \\ -d=3 \end{array} \right\} \Rightarrow a=1; b=\frac{5}{2}; c=-1; d=-3 \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

- a) (0'7 Puntos). Determine para qué valores de a tiene inversa la matriz A .
b) (1 Punto). Para $a = 2$, calcule la matriz inversa de A .
c) (0'8 Puntos). Para $a = 0$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A^{-1} - B \cdot B^t = I_3$.

SOCIALES II. 2020 RESERVA 1. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix} = 4a - 3 - 3 + 2a^2 = 2a^2 + 4a - 6 = 0 \Rightarrow a = 1; a = -3$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores distintos de 1 y -3 .

- b) Calculamos la inversa para $a = 2$

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^t}{10} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}}{10} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

- b) Resolvemos la ecuación matricial para $a = 0$

$$X \cdot A^{-1} - B \cdot B^t = I_3 \Rightarrow X \cdot A^{-1} = I_3 + B \cdot B^t \Rightarrow X \cdot A^{-1} \cdot A = (I_3 + B \cdot B^t) \cdot A \Rightarrow X = (I_3 + B \cdot B^t) \cdot A$$

$$\begin{aligned} X = (I_3 + B \cdot B^t) \cdot A &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 1 & -5 \\ 10 & -3 & -7 \\ 24 & 1 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = A \cdot A^t$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

a) (0'75 puntos) ¿Para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz B?

b) (0'75 puntos) Para $a = 1$, calcule la inversa de la matriz B.

c) (1 punto) Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $B^t \cdot X + 9C = O$.

SOCIALES II. 2020 RESERVA 2. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz B y su determinante.

$$B = A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & a \\ a & a^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$|B| = \begin{vmatrix} 5 & a \\ a & a^2 + 1 \end{vmatrix} = 5a^2 + 5 - a^2 = 4a^2 + 5 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución real, luego, para cualquier valor de a siempre tiene inversa la matriz B.

b) Calculamos la inversa para $a = 1$

$$B^{-1} = \frac{(B^{adj})^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^t}{9} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}{9} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$B^t \cdot X + 9C = O \Rightarrow B^t \cdot X = O - 9C = -9C \Rightarrow (B^t)^{-1} \cdot B^t \cdot X = -9 \cdot (B^t)^{-1} \cdot C \Rightarrow X = -9 \cdot (B^t)^{-1} \cdot C$$

Como $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t =$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

$$X = -9 \cdot (B^t)^{-1} \cdot C = -9 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -3 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (0'8 puntos) Razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$$B^t \cdot A, C \cdot B, B \cdot A + B, B^2$$

b) (0.7 puntos) Calcule los valores del parámetro k para los que la matriz A es invertible.

c) (1 punto) Para $k = -1$, calcule la inversa de la matriz A .

SOCIALES II. 2020 RESERVA 3. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a)

$B_{(3,2)}^t \cdot A_{(3,3)}$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

$C_{(2,2)} \cdot B_{(2,3)}$ Si se puede y la matriz resultante es de orden $(2,3)$.

$B_{(2,3)} \cdot A_{(3,3)} + B_{(2,3)}$ Si se puede y la matriz resultante es de orden $(2,3)$.

$B_{(2,3)} \cdot B_{(2,3)}$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

b) Calculamos el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -3 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = -3 + k^2 + 3 - 2k = k^2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 0 ; k = 2$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de $k \neq 0$ y 2 .

c) Calculamos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}^t}{3} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a) (0'8 Puntos). ¿Para qué valores del parámetro m tiene inversa la matriz A ?

b) (1'7 Puntos). Para $m = 0$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = A \cdot A^t$.

SOCIALES II. 2020 RESERVA 4. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3m - m^2 - 6 = -m^2 + 3m + 4 = 0 \Rightarrow m = -1; m = 4$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de $m \neq -1$ y 4 .

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$X \cdot A = A \cdot A^t \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot A^t \cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}^t}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$\begin{aligned} X = A \cdot A^t \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 8 & 34 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 20 & -4 \\ 13 & -18 & 10 \\ 62 & -124 & 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 & -1 \\ \frac{13}{4} & -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{31}{2} & -31 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según tipo de habitación, individual, doble y triple.

La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros. El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) (1 punto) Expresa, mediante una matriz A , los precios de las dos agencias según el tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.

b) (1 punto) Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesa a cada instituto?

c) (0'5 puntos) ¿Existe inversa de la matriz D ? ¿Y de la matriz A ? Justifique las respuestas.

SOCIALES II. 2020 SEPTIEMBRE EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Llamamos: $A_1 = \text{Agencia 1}$; $A_2 = \text{Agencia 2}$

$In = \text{Individual}$; $Do = \text{Doble}$; $Tr = \text{Triple}$

$I_1 = \text{Instituto 1}$; $I_2 = \text{Instituto 2}$; $I_3 = \text{Instituto 3}$

Las matrices que nos piden son:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} In & Do & Tr \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad D = \begin{matrix} & \begin{matrix} I_1 & I_2 & I_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} In \\ Do \\ Tr \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b) Calculamos la matriz $A \cdot D$

$$A \cdot D = \begin{matrix} & \begin{matrix} In & Do & Tr \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} I_1 & I_2 & I_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} In \\ Do \\ Tr \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} I_1 & I_2 & I_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1678 & 1670 & 2153 \\ 1691 & 1682 & 2148 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Vemos que al Instituto 1 e Instituto 2, le interés la Agencia 1. Mientras que al Instituto 3 le interesa la Agencia 2.

c) La matriz A no tiene inversa ya que no es cuadrada.

Calculamos el determinante de la matriz D

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 252 + 64 + 75 - 24 - 210 - 240 = -83 \neq 0 \Rightarrow \text{Si tiene inversa}$$