

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio A2
- Reserva 1, Ejercicio A2
- Reserva 2, Ejercicio A2
- Reserva 3, Ejercicio A2
- Reserva 4, Ejercicio A1
- Julio, Ejercicio A1

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A ?

b) Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$.

SOCIALES II. 2021 JUNIO. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3m - 2m^2 + 3 = -2m^2 + 3m + 5 = 0 \Rightarrow m = -1 ; m = \frac{5}{2}$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de $m \neq -1$ y $m \neq \frac{5}{2}$.

$$b) X \cdot A - A^2 = I_3 \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} - A^2 \cdot A^{-1} = I_3 \cdot A^{-1} \Rightarrow X - A = A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} + A$$

Calculamos la inversa

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & -1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X = A^{-1} + A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & -1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ -2 & 1 & -2 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^2, A^3, A^4 y deduzca la expresión de A^n , con n un número natural

b) Razone si existe la inversa de la matriz B .

c) Razone si la ecuación matricial $B \cdot X = C$ tiene solución y resuélvala en caso de que sea posible.

SOCIALES II. 2021 RESERVA 1. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 2^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^3 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de B

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Si tiene inversa}$$

c) Como B tiene inversa, la ecuación matricial tiene solución

$$B \cdot X = C \Rightarrow B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot C \Rightarrow X = B^{-1} \cdot C$$

Calculamos la matriz inversa de B

$$B^{-1} = \frac{(B^{adj})^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Calcule el valor del parámetro a para que la matriz A no tenga inversa.
 b) Para $a = 3$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - X \cdot B = C$
 c) Para $a = 3$, compruebe que $A^2 = 11 \cdot A$ y exprese A^8 en función de la matriz A .

SOCIALES II. 2021 RESERVA 2. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 8a - 24 = 0 \Rightarrow a = 3$$

La matriz A no tiene inversa para $a = 3$, ya que su determinante vale 0.

- b) Resolvemos la ecuación matricial $X \cdot A - X \cdot B = C$ para $a = 3$

$$\begin{aligned} X \cdot A - X \cdot B = C &\Rightarrow (a \ b) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - (a \ b) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (3a + 6b \quad 4a + 8b) - (2a + 3b \quad 2a + 3b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a + 3b &= 1 \\ 2a + 5b &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1; b = 0 \end{aligned}$$

Luego, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

- c) Comprobamos si $A^2 = 11 \cdot A$, para $a = 3$

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix} \\ 11 \cdot A &= 11 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, si es cierto

Calculamos A^8 en función de A

$$\begin{aligned} A^8 &= A^2 \cdot A^2 \cdot A^2 \cdot A^2 = 11A \cdot 11A \cdot 11A \cdot 11A = 11^4 \cdot A^2 \cdot A^2 = 11^4 \cdot 11A \cdot 11A = 11^6 \cdot A^2 = \\ &= 11^6 \cdot 11A = 11^7 \cdot A \end{aligned}$$

Se considera la ecuación matricial $(10I_3 - A) \cdot X = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y B es una matriz

con tres filas y una columna.

a) Razone qué dimensión ha de tener la matriz X .

b) ¿Tiene solución la ecuación matricial anterior para cualquier matriz B de orden 3×1 ? ¿Por qué?

c) Resuelva dicha ecuación matricial si $B = (5 \ 20 \ -3)^t$.

SOCIALES II. 2021 RESERVA 3. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) $(10I_3 - A)_{(3,3)} \cdot X_{(m,n)} = B_{(3,1)} \Rightarrow m = 3; n = 1$

Luego, la matriz X es de orden 3×1 .

b) $(10I_3 - A) \cdot X = B \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \Rightarrow C \cdot X = B$

Como el determinante de la matriz $C = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ es:

$$|C| = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 320 - 20 = 300 \neq 0 \Rightarrow \text{La matriz } C \text{ tiene inversa, luego:}$$

$$C \cdot X = B \Rightarrow X = C^{-1} \cdot B$$

Por lo tanto, la ecuación siempre tiene solución para cualquier matriz B .

c)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8x - y = 5 \\ -4x + 8y = 20 \\ -2x - 2y + 5z = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 1; y = 3; z = 1 \right.$$

Luego, la matriz X es: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^{40} y $(A^t)^{30}$

b) Calcule $(A^{-1} + A)^2$

c) Resuelva la ecuación matricial $(A^t + I_2) \cdot X = A^t - I_2$

SOCIALES II. 2021 RESERVA 4. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } A^{40} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -40 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^t)^{30} = (A^{30})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -30 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -30 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1} + A)^2 = (A^{-1} + A) \cdot (A^{-1} + A) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{aligned} (A^t + I_2) \cdot X &= A^t - I_2 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2a - c &= 0 \\ 2b - d &= -1 \\ 2c &= 0 \\ 2d &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 0; b = -\frac{1}{2}; c = 0; d = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$

- a) Determine para qué valores del parámetro a , la matriz A tiene inversa.
 b) Para $a = 1$, calcule la inversa de A
 c) Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^t$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

SOCIALES II. 2021 JULIO. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = -a - 8 = 0 \Rightarrow a = -8$$

Tiene inversa para todos los valores de $a \neq -8$

- b) Calculamos la inversa para $a = 1$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}^t}{-9} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}}{-9} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

- c) $A \cdot X = B^t \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B^t \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B^t$

$$X = A^{-1} \cdot B^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$