

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A

$$\text{Sea } I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx .$$

- a) Expresa I aplicando el cambio de variables $t = 1 + x^2$.
b) Calcula el valor de I .

MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos los nuevos límites de integración:

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow t = 1 + x^2 = 1$$

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow t = 1 + x^2 = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 1 + x^2 ; x^2 = t - 1 \\ dt = 2x dx ; x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} I = \int_0^2 \frac{x^2 \cdot x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_1^5 \frac{(t-1) \cdot \frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_1^5 (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) dt$$

$$\text{b) } I = \frac{1}{2} \int_1^5 (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^5 = \frac{2\sqrt{5} + 2}{3}$$

El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \frac{x^2}{a}$ e $y = \sqrt{ax}$, con $a > 0$, vale 3.

Calcula el valor de a .

MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

1) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{a} \\ y = \sqrt{ax} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \sqrt{ax} \Rightarrow \frac{x^4}{a^2} = ax \Rightarrow x^4 - a^3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

2) Vamos a ver en el intervalo $(0, a)$, que función va por encima y cuál por debajo

$$\text{Si } x = \frac{a}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{a} = \frac{\frac{a^2}{4}}{a} = \frac{a}{4} \Rightarrow \text{Debajo}$$

$$\text{Si } x = \frac{a}{2} \Rightarrow y = \sqrt{ax} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{Encima}$$

3) Calculamos el área

$$3 = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \left[\sqrt{a} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{a} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^2}{3}$$

$$3 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

Como el enunciado nos dice que $a > 0$, entonces $a = 3$.

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x \cdot e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- a) Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta $x = -1$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos primero la continuidad

$e^x - 1$ es continua y derivable en todo \mathbb{R} por ser suma de funciones continuas.

$x \cdot e^{-x^2}$ es continua y derivable en todo \mathbb{R} por ser producto de funciones continuas.

Nos falta ver la continuidad en $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{-x^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{-x^2} = 0, \text{ luego, es continua en } x = 0$$

$$\text{Calculamos } f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ 1 \cdot e^{-x^2} (1 - 2x^2) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Veamos si existe $f'(0)$, es decir, si $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = 1$$

$$f'(0^-) = 1$$

Como $f'(0^+) = f'(0^-) = 1$, existe $f'(0) = 1$

b) Como nos piden el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta $x = -1$ solo interviene la rama $x \cdot e^{-x^2}$ puesto que $f(0) = 0$ y para $x > 0$ la función $e^x - 1$ sube a $+\infty$. La función $x \cdot e^{-x^2}$ solo corta al eje OX en $x = 0$, y para $x < 0$ está siempre debajo del eje OX, luego:

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 -x \cdot e^{-x^2} dx$$

Hacemos el cambio $-x^2 = t \Rightarrow -2x dx = dt$

$$\text{Para } x = -1 \Rightarrow t = -1$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 -x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^t dt = \frac{1}{2} [e^t]_{-1}^0 = \frac{e-1}{2e} u^2$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} -\frac{a}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a) Halla el valor de a sabiendo que f es continua.

b) Esboza la gráfica de f .

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x + 2 = 0$ y $x - 2 = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como f es continua se tiene que cumplir que los límites laterales en $x = -1$ sean iguales.

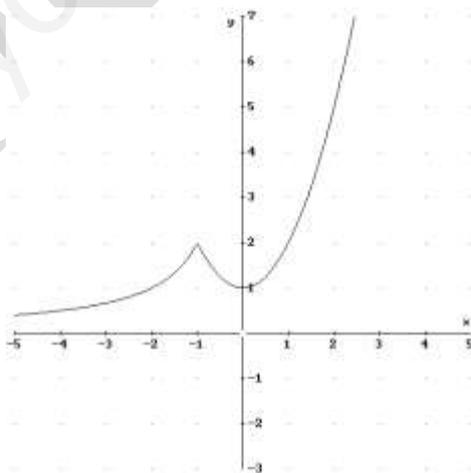
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{a}{x} = a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 1 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 2$$

b) $-\frac{2}{x}$ es una hipérbola (función de proporcionalidad inversa) que se dibuja en el II y IV cuadrante.

Como sabemos tiene de asíntota horizontal $y = 0$, y de vertical $x = 0$.

$x^2 + 1$ es una parábola exactamente igual que x^2 pero desplazada una unidad hacia arriba en el eje OY.

Un esbozo de su gráfica sería:



c) El área limitada por OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$ es:

$$A = \int_{-2}^{-1} -\frac{2}{x} dx + \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = [-2 \ln |x|]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^2 = 6 + 2 \ln 2$$

a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^2 + b$. Halla los valores de a y b sabiendo $\int_0^6 f(x) dx = 6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale -12 .

b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2 + px + q$. Calcula los valores de p y q sabiendo que la función f tiene un extremo en $x = -6$ y su valor en él es -2 .

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\int_0^6 f(x) dx = 6 \Rightarrow \int_0^6 (ax^2 + b) dx = \left[\frac{ax^3}{3} + bx \right]_0^6 = \frac{216a}{3} + 6b = 6 \Rightarrow 12a + b = 1$$

Si la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa 3 vale -12 , sabemos que $f'(3) = -12$

$$f'(x) = 2ax \Rightarrow f'(3) = -12 \Rightarrow 6a = -12 \Rightarrow a = -2$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos: $12a + b = 1 \Rightarrow -24 + b = 1 \Rightarrow b = 25$

Luego, la función pedida es: $f(x) = -2x^2 + 25$

b)

$$\text{Extremo en } x = -6 \Rightarrow f'(-6) = 0 \Rightarrow -12 + p = 0 \Rightarrow p = 12$$

$$\text{Pasa por } (-6, -2) \Rightarrow f(-6) = -2 \Rightarrow 36 - 6p + q = -2 \Rightarrow 36 - 72 + q = -2 \Rightarrow q = 34$$

La función pedida es $f(x) = x^2 + 12x + 34$

Calcula $\int (x^2 - 1) \cdot e^{-x} dx$

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos por partes la integral que nos piden.

$$\int (x^2 - 1) \cdot e^{-x} dx = -(x^2 - 1) \cdot e^{-x} + 2 \int x \cdot e^{-x} dx = -(x^2 - 1) \cdot e^{-x} + 2 \left[-x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx \right] = -e^{-x} (x^2 + 2x + 1) + C$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1; \quad du = 2x \, dx \\ dv &= e^{-x} dx; \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x; \quad du = dx \\ dv &= e^{-x} dx; \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \pi$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La recta tangente en $x=0$ es $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$\begin{aligned} f(x) = \text{sen } x &\Rightarrow f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x &\Rightarrow f'(0) = 1 \end{aligned}$$

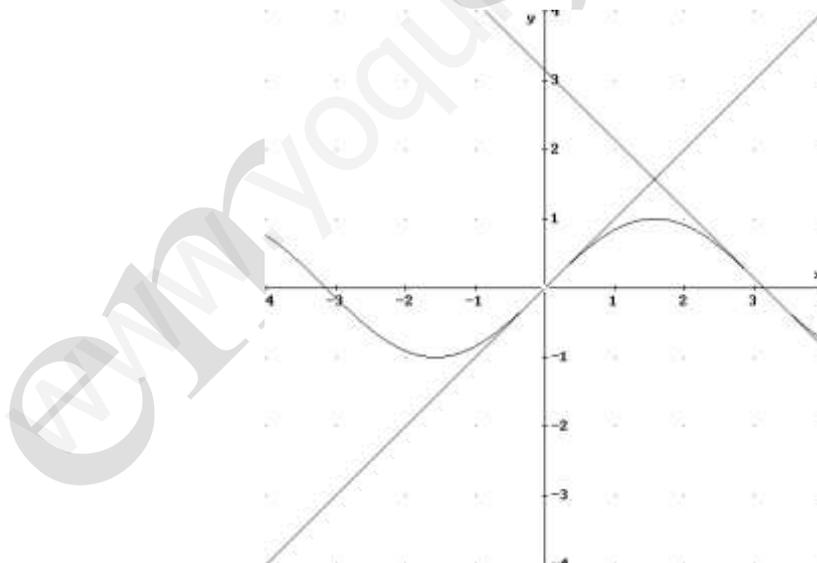
La recta tangente en $x=0$ es $y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x$, que es la bisectriz del I y III cuadrante.

La recta tangente en $x = \pi$ es $y - f(\pi) = f'(\pi) \cdot (x - \pi)$

$$\begin{aligned} f(x) = \text{sen } x &\Rightarrow f(\pi) = 0 \\ f'(x) = \cos x &\Rightarrow f'(\pi) = -1 \end{aligned}$$

La recta tangente en $x = \pi$ es $y - 0 = -1 \cdot (x - \pi) \Rightarrow y = -x + \pi$, que es la bisectriz del II y IV cuadrante, pero desplazada π unidades hacia arriba en el eje OY.

Un esbozo de la gráfica es:



El área pedida es

$$\int_0^{\pi/2} (x - \text{sen } x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-x + \pi - \text{sen } x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \cos x \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi^2 - 8}{4} u^2$$

Sea $f : [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que su función derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{si } 0 < x < 3 \\ -2x + 8 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

a) Determina la expresión de f sabiendo que $f(1) = \frac{16}{3}$

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como es derivable en $(0,4)$ es continua en $[0,4]$ en particular es continua y derivable en $x = 3$.

$$\text{Calculamos } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} + C & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 8x + D & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{Como } f(1) = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} + C = \frac{16}{3} \Rightarrow C = 5$$

Como es continua en $x = 3$, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{3} + C = 3 + C \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} -x^2 + 8x + D = 15 + D \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + C = 15 + D \Rightarrow 8 = 15 + D \Rightarrow D = -7$$

$$\text{Luego, la función es: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} + 5 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 8x - 7 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

b) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = \frac{1}{3} + 5 = \frac{16}{3}$$

$$f'(1) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Luego la recta tangente en } x = 1 \text{ es } y - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \cdot (x - 1) \Rightarrow 2x - 3y + 14 = 0$$

Sean las funciones f y $g : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \lambda \sqrt{x}$, donde λ es un número real positivo fijo. Calcula el valor de λ sabiendo que el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es $\frac{1}{3}$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si igualamos las dos funciones, vemos que los puntos de corte son:

$$x^2 = \lambda \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = \lambda^2 x \Rightarrow x = 0 ; x = \sqrt[3]{\lambda^2}$$

Tenemos que ver cuál de las dos funciones va por encima y cuál va por debajo. Para ello sustituimos un valor comprendido entre 0 y $\sqrt[3]{\lambda^2}$, y vemos cuál tiene mayor valor.

$$\text{Para } x = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow f(x) = x^2 = \frac{\lambda^2}{4}$$

$$\text{Para } x = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow g(x) = \lambda \sqrt{x} = \lambda \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

Por lo tanto, la función que va por encima es $g(x) = \lambda \sqrt{x}$. Luego el área vendrá dada por:

$$A = \int_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}} [\lambda \sqrt{x} - x^2] dx = \left[\lambda \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}} = \frac{2\lambda^2}{3} - \frac{\lambda^2}{3} = \frac{\lambda^2}{3} \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Como λ es un número positivo, entonces $\lambda = 1$

Sea $f : (0,2) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \ln(2-x) & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$

siendo \ln la función logaritmo neperiano.

a) Estudia la derivabilidad de f en el punto $x = 1$.

b) Calcula $\int_1^{1.5} f(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Vamos a estudiar primero la continuidad en $x = 1$.

$$1) f(1) = \ln 1 = 0$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(2-x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$3) f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

Luego, la función es continua en $x = 1$. Vamos a estudiar ahora la derivabilidad, para ello calculamos $f'(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{-1}{2-x} & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

La función es derivable en $x = 1$ si $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = \frac{1}{1} = 1 \\ f'(1^+) = \frac{-1}{1} = -1 \end{array} \right\} f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} \ln(2-x) dx &= \left[x \cdot \ln(2-x) + \int \frac{x}{2-x} dx \right] = \left[x \cdot \ln(2-x) - x - 2 \ln(x-2) \right]_1^{1.5} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -0.15 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} u = \ln(2-x); \quad du = \frac{-1}{2-x} dx \\ dv = dx; \quad v = x \end{array}$$

a) Haz un esbozo del recinto limitado por las curvas $y = \frac{15}{1+x^2}$ e $y = x^2 - 1$.

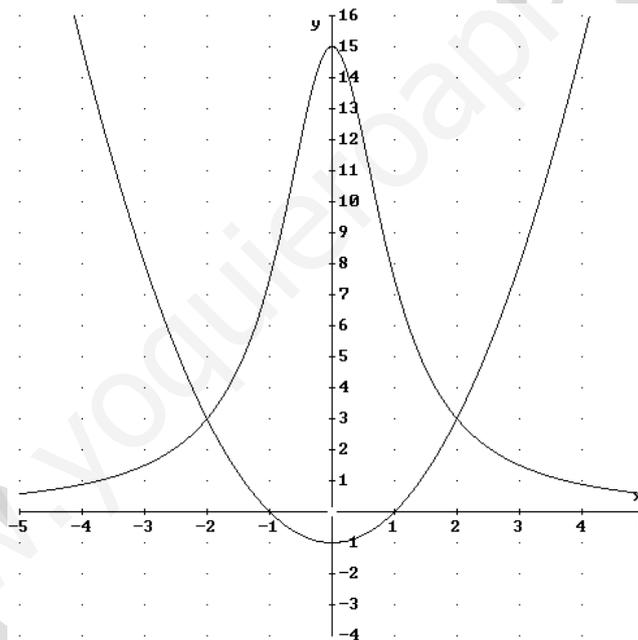
b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $y = \frac{15}{1+x^2}$ siempre es positiva (está por encima del eje de abscisas OX), tiene una asíntota horizontal que es la recta $y = 0$ y, además, $f(0) = 15$. La función $y = x^2 - 1$ es una parábola.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas es



b)

$$A = \int_{-2}^2 \left(\frac{15}{1+x^2} - x^2 + 1 \right) dx = \left[15 \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^2 = 30 \operatorname{arctg} 2 - \frac{4}{3} u^2$$

Calcula

a) $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} dx.$

b) $\int (2x - 3) \cdot \operatorname{tg}(x^2 - 3x) dx$, siendo tg la función tangente.

MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} dx = \int 5 dx + \int \frac{-x - 35}{x^2 - 25} dx = 5x + I_1$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x = 5; x = -5$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-x - 35}{x^2 - 25} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 5} = \frac{A(x + 5) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x = 5 \Rightarrow -40 = 10A ; A = -4$$

$$x = -5 \Rightarrow -30 = -10B ; B = 3$$

Con lo cual:

$$I_1 = \int \frac{-x - 35}{x^2 - 25} dx = \int \frac{-4}{x - 5} dx + \int \frac{3}{x + 5} dx = -4 \ln |x - 5| + 3 \ln |x + 5|$$

Por lo tanto la solución es:

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} dx = 5x - 4 \ln |x - 5| + 3 \ln |x + 5| + C$$

b) Hacemos el cambio de variable $x^2 - 3x = t$, con lo cual $(2x - 3) dx = dt$. Sustituyendo, tenemos:

$$\int (2x - 3) \cdot \operatorname{tg}(x^2 - 3x) dx = \int \operatorname{tg} t dt = - \int \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} dt = - \ln |\cos t| = - \ln |\cos(x^2 - 3x)| + C$$