

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Calcula $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2 - x)(x - 1)}$

MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Las raíces del denominador son: $x = 0$; $x = 1$; $x = 1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x \cdot (x - 1) \cdot (x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} = \frac{A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx}{x(x - 1)^2}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A , B y C sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = C$$

$$x = 2 \Rightarrow 1 = A + 2B + C \Rightarrow B = -1$$

Con lo cual:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2 - x)(x - 1)} = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx + \int_{-2}^{-1} \frac{-1}{x - 1} dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x - 1)^2} dx = \left[\ln x - \ln(x - 1) - \frac{1}{x - 1} \right]_{-2}^{-1} = \ln \frac{3}{4} + \frac{1}{6}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^{-2x}$

a) Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

RESOLUCIÓN

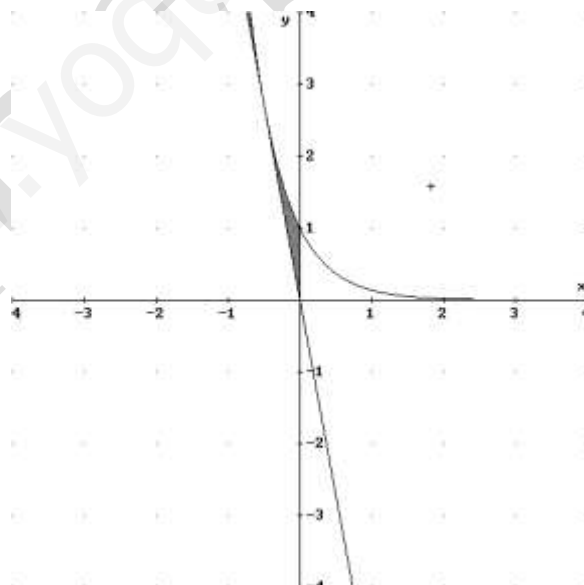
a) La recta tangente en $x = -\frac{1}{2}$ es $y - f\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = e$$

$$f'(x) = -2e^{-2x} \Rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -2e$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - e = -2e \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -2ex$

b) Hacemos el dibujo



$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 (e^{-2x} + 2ex) dx = \left[-\frac{e^{-2x}}{2} + ex^2 \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{e}{2} + \frac{e}{4} \right) = \frac{e}{4} - \frac{1}{2} u^2$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Se sabe que tiene un máximo local en $x=1$, que el punto $(0,1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{4}$. Calcula a, b, c y d .

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c ; \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Máximo en $x=1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

- Punto de inflexión en $(0,1) \Rightarrow \begin{cases} \text{Pasa por } (0,1) \Rightarrow d = 1 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$

- $\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{4} \Rightarrow \int_0^1 (ax^3 - 3ax + 1) dx = \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} + 1 = \frac{9}{4}$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones sale: $a = -1 ; b = 0 ; c = 3 ; d = 1$

Dadas las funciones $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x)=\sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de dichas funciones

$$\sqrt{x}=\sqrt[3]{x}\Rightarrow x^3=x^2\Rightarrow x^2(x-1)=0\Rightarrow x=0;x=1$$

$$A=\int_0^1(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x})dx=\left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}u^2$$

Sea $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = \ln x$ ($\ln x$ denota logaritmo neperiano).

a) Justifica que la recta de ecuación $y = \frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = e$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g , el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

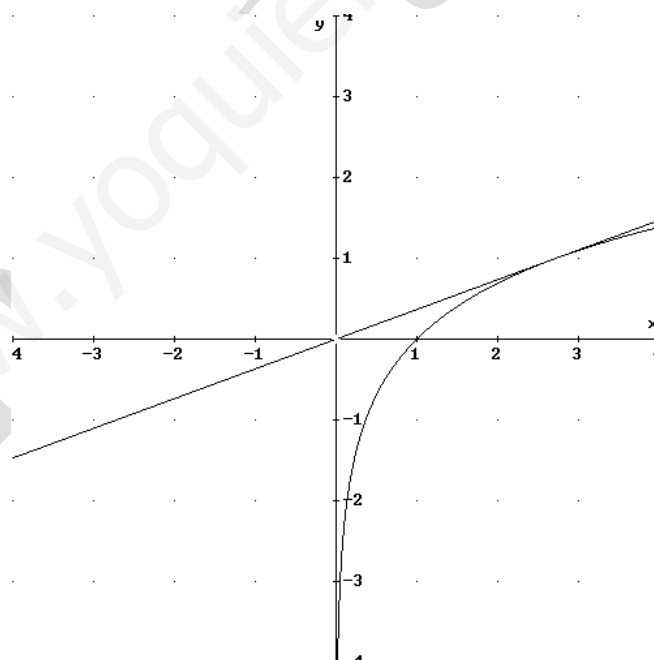
a) La recta tangente en $x = e$ es $y - g(e) = g'(e) \cdot (x - e)$

$$g(e) = \ln e = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g'(e) = \frac{1}{e}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 1 = \frac{1}{e} \cdot (x - e) \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$

b) El área de la región pedida es:



$$A = \int_0^e \left(\frac{1}{e}x \right) dx - \int_1^e (\ln x) dx = \left[\frac{x^2}{2e} \right]_0^e - [x \ln x - x]_1^e = \frac{e}{2} - 1u^2$$

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{y} \quad g(x) = 3x - 6$$

a) Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g .

b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte de dichas funciones

$$x^3 - 4x = 3x - 6 \Rightarrow x^3 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = 1 ; x = -3$$

b)

$$A = \int_{-3}^1 (x^3 - 7x + 6) dx + \int_1^2 (-x^3 + 7x - 6) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 6x \right]_{-3}^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^2}{2} - 6x \right]_1^2 = \frac{131}{4} u^2$$

Calcula $\int_0^1 x \ln(x+1) dx$.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int x \cdot \ln(x+1) dx$, que es una integral por partes.

$$u = \ln(x+1); \quad du = \frac{1}{x+1} dx$$

$$dv = x dx; \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \int x \cdot \ln(x+1) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{(x+1)} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right) + C$$

Por lo tanto, la integral que nos piden es:

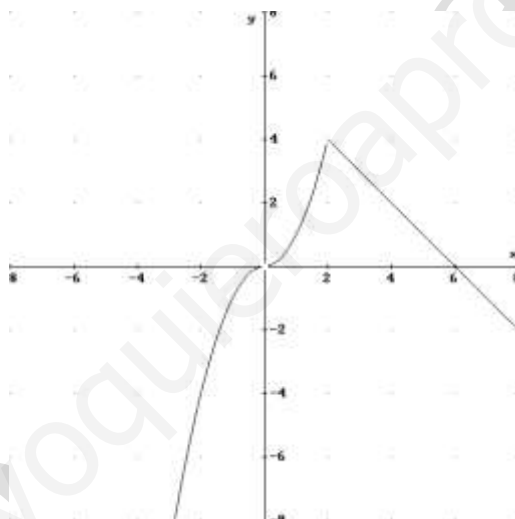
$$\int_0^1 x \ln(x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln(x+1)}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \leq 2 \\ 6-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) Esboza la gráfica de f .
b) Estudia la derivabilidad de f .
c) Calcula el área comprendida entre la gráfica de f y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

- a) Lo primero que hacemos es abrir la función. $f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \leq 2 \\ 6-x & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 6-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$



- b) Por el dibujo vemos que la función es continua en $x=0$ y en $x=2$. Vamos a estudiar la derivabilidad en esos dos puntos.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 2 \\ -1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = 0 \Rightarrow \text{Derivable en } x=0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 4 \\ f'(2^+) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) = 0 \Rightarrow \text{No derivable en } x=2.$$

- c) Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$A = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^6 (6-x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[6x - \frac{x^2}{2} \right]_2^6 = \frac{8}{3} + (36-18) - (12-2) = \frac{32}{3} u^2$$

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = a \quad (\text{con } a > 0)$$

Se sabe que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f y g es $\frac{4}{3}$. Calcula el valor de la constante a .

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como $a > 0$, la gráfica de $g(x) = a$ es una recta paralela al eje OX y por encima de él. La gráfica de $f(x)$ es una parábola con vértice en $(0,0)$ y ramas hacia arriba.

Como el área encerrada por el recinto es $\frac{4}{3}$, y sabemos que la recta $g(x) = a$ es mayor que cero, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \left(a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} \right) - \left(-a\sqrt{a} + \frac{(\sqrt{a})^3}{3} \right) = \\ &= 2a\sqrt{a} - 2\frac{(\sqrt{a})^3}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4a\sqrt{a} = 4 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Calcula $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int x^2 \cdot \ln x \, dx$, que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} u &= \ln x; \quad du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv &= x^2 \, dx; \quad v = \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

$$I = \int x^2 \cdot \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

Por lo tanto, la integral que nos piden es:

$$\int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

Considera las funciones $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \quad \text{y} \quad g(x) = x^3 \ln x$$

a) Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando $x = \frac{\pi}{3}$.

(Se puede hacer el cambio de variable $t = \cos x$).

b) Calcula $\int g(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $t = \cos x \Rightarrow dt = -\operatorname{sen} x dx$

$$F(x) = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx = -\int \frac{dt}{t^3} = -\int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{2} = \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2\cos^2 \frac{\pi}{3}} + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} + C \Rightarrow C = -1$$

$$\text{Luego, } F(x) = \frac{1}{2\cos^2 x} - 1$$

b)

$$\int x^3 \cdot \ln x dx = \frac{x^4 \cdot \ln x}{4} - \int \frac{x^4}{4x} dx = \frac{x^4 \cdot \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx$ $dv = x^3 dx; \quad v = \frac{x^4}{4}$

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

a) Esboza la gráfica de g .

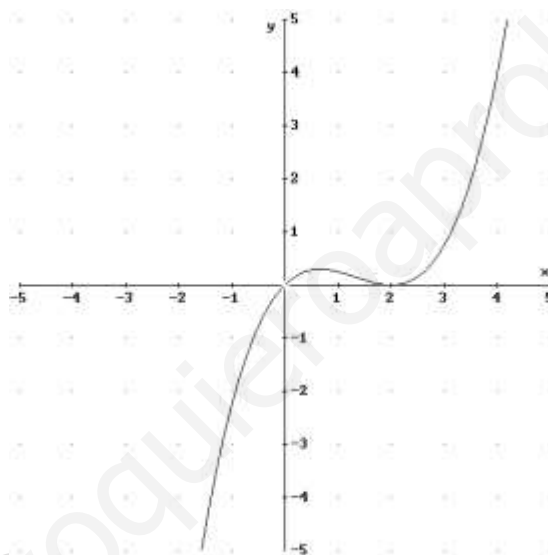
b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g y el eje de abscisas.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b) La recta tangente en $x = 2$ es $y - g(2) = g'(2) \cdot (x - 2)$

$$g(2) = 0$$

$$g'(x) = \frac{3x^2}{4} - 2x + 1 \Rightarrow g'(2) = 0$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 0 = 0 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 0$

c)

$$A = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \right) dx = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{3} u^2$$

Dada la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x + |x^2 - 1|$.

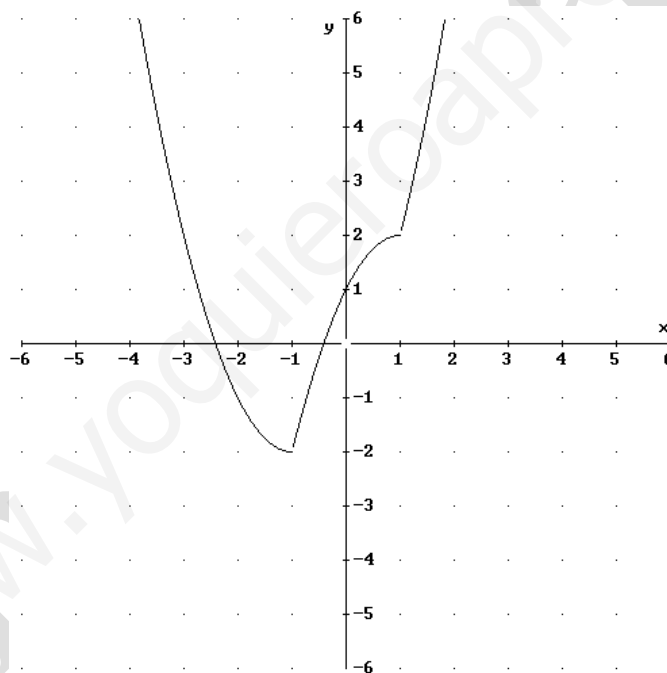
a) Esboza la gráfica de g .

c) Calcula $\int_0^2 g(x) dx$.

MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Lo primero que hacemos es abrir la función. $g(x) = 2x + |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b)

$$\int_0^2 g(x) dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x + 1) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x \right]_1^2 = 6$$

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 2$$

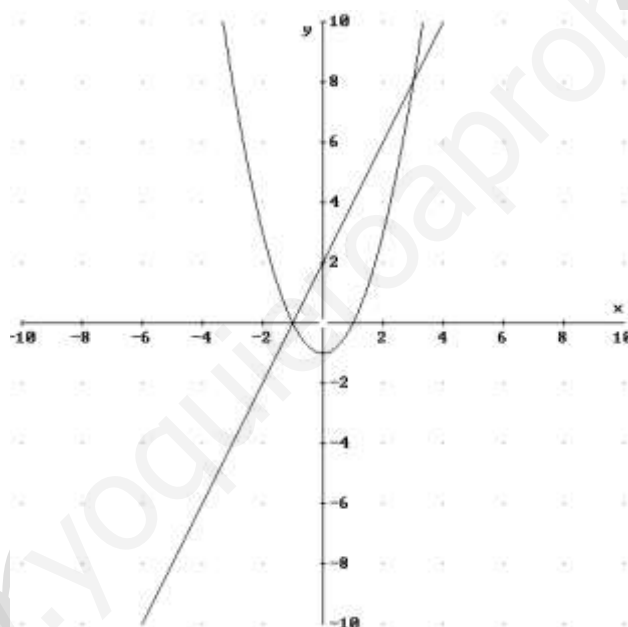
a) Esboza las gráficas de f y g .

b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a)



b) El área pedida es:

$$A = \int_{-1}^3 (2x + 2 - x^2 + 1) dx = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = \frac{32}{3} u^2$$