EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2012

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

Sea f una función continua en el intervalo $[2,3]$ y F una función primitiva de f tal que , $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcula:

a) $\int_2^3 f(x)\,dx$

b) $\int_2^3 \left(5f(x)-7\right)dx$

c) $\int_2^3 \left(F(x)\right)^2 \cdot f(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) $\int_2^3 f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_2^3 = F(3)-F(2) = 2-1 = 1$

b) $\int_2^3 \left(5f(x)-7\right)dx = 5\int_2^3 f(x)\,dx - 7\int_2^3 dx = 5\cdot 1 - 7\cdot\left[x\right]_2^3 = 5-7(3-2) = -2$

c) $\int_2^3 \left(F(x)\right)^2 \cdot f(x)\,dx = \left[\dfrac{\left(F(x)\right)^3}{3}\right]_2^3 = \dfrac{\left(F(3)\right)^3}{3} - \dfrac{\left(F(2)\right)^3}{3} = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$

Sea la función f definida por $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 1$.

a) Halla una primitiva de f.
b) Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2,k]$ sea $\ln 2$, donde ln denota el logaritmo neperiano.
MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Las raíces del denominador son: $x^2-1=0 \Rightarrow x=-1$; $x=1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 2=2A \Rightarrow A=1$$

$$x=-1 \Rightarrow 2=-2B \Rightarrow B=-1$$

Con lo cual: $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx=\int \frac{1}{x-1}\,dx+\int \frac{-1}{x+1}\,dx=\ln(x-1)-\ln(x+1)+C$

b)

$$A=\ln 2=\int_2^k \frac{2}{x^2-1}\,dx=\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]_2^k=\ln\frac{k-1}{k+1}+\ln 3$$

Resolvemos la ecuación logarítmica:

$$\ln 2=\ln\frac{k-1}{k+1}+\ln 3 \Rightarrow \ln\frac{2}{3}=\ln\frac{k-1}{k+1} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{k-1}{k+1} \Rightarrow 2k+2=3k-3 \Rightarrow k=5$$

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \cos\ x$, respectivamente.

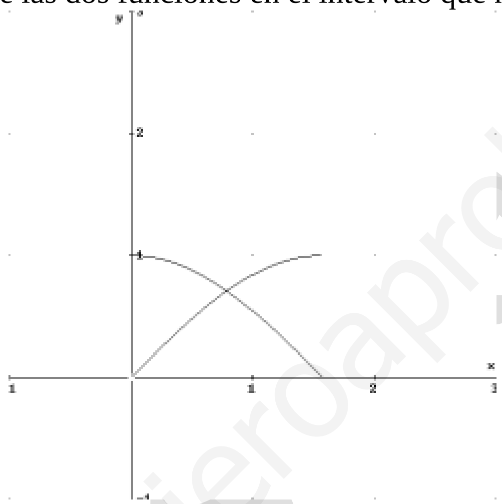
a) Realiza un esbozo de las gráficas de *f* y *g* en el intervalo $\left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$

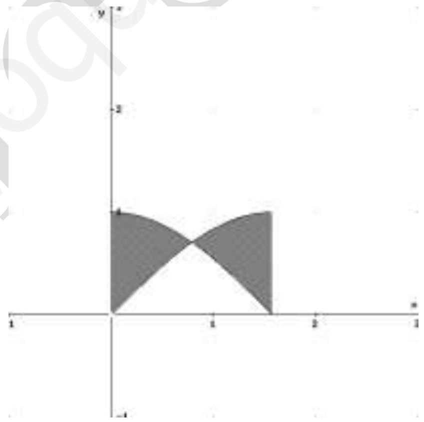
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Representamos gráficamente las dos funciones en el intervalo que nos dan:



b) El área que nos piden son los dos recintos coloreados:



Calculamos el área

$$Área = A_1 + A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - sen\,x)\ dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (sen\,x - \cos x)\ dx = \left[sen\,x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - sen\,x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[sen\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right] - \left[sen\,0 + \cos 0\right] + \left[-\cos\frac{\pi}{2} - sen\frac{\pi}{2}\right] - \left[-\cos\frac{\pi}{4} - sen\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 2\sqrt{2} - 2\ u^2$$

Sea f la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\cos x$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(\pi,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x)=\int x^2\cos x\,dx$, que es una integral por partes.

$$F(x)=\int x^2\cos x\,dx=x^2 sen\,x-2\int x\cdot sen\,x\,dx=x^2 sen\,x-2\left[-x\cdot\cos x+\int\cos x\,dx\right]=$$
$$=x^2 sen\,x+2x\cdot\cos x-2\,sen\,x+C$$

$u=x^2;\ du=2x\ dx$
$dv=\cos x\,dx;\ v=sen\,x$

$u=x;\ du=dx$
$dv=sen\,x\,dx;\ v=-\cos x$

$$F(x)=x^2\cdot sen\,x+2x\cdot\cos x-2\,sen\,x+C$$

Como nos piden una primitiva que pase por $(\pi,0)\Rightarrow F(\pi)=0$, luego sustituyendo podemos calcular el valor de C.

$$0=\pi^2\cdot sen\,\pi+2\pi\cdot\cos\pi-2sen\,\pi+C\ \Rightarrow 0=-2\pi+C\Rightarrow\ C=2\pi$$

Por lo tanto, la función primitiva que nos piden es: $F(x)=x^2\cdot sen\,x+2x\cdot\cos x-2\,sen\,x+2\pi$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=x^3-4x$
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=-x-2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.
c) Calcula el área del recinto anterior.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

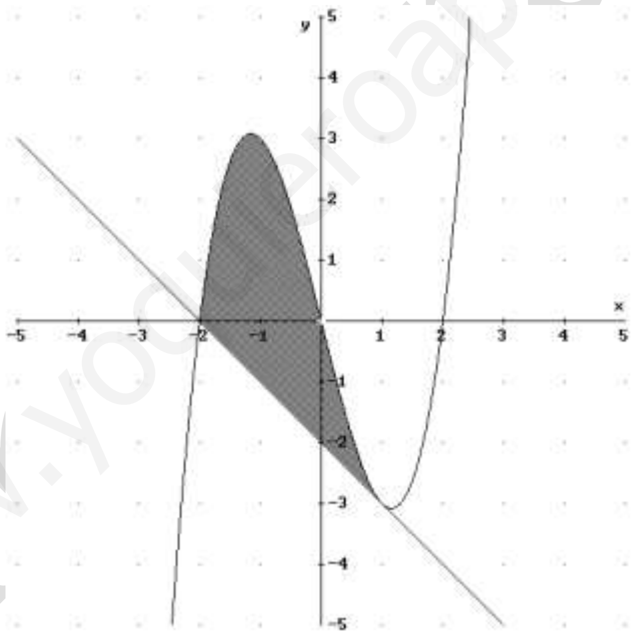
R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=-3$$
$$f'(x)=3x^2-4\Rightarrow f'(1)=3(1)^2-4=-1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+3=-1\cdot(x-1)\Rightarrow y=-x-2$

b) Hacemos un esbozo.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x^3-4x=-x-2\Rightarrow x^3-3x+2=0\Rightarrow x=1\,;\ x=-2$$

Luego, los puntos de corte son: $(1,-3)$ y $(-2,0)$

c)

$$A=\int_{-2}^{1}\left[(x^3-4x)-(-x-2)\right]dx=\int_{-2}^{1}\left[x^3-3x+2\right]dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(\frac{16}{4}-\frac{12}{2}-4\right)=\frac{27}{4}u^2$$

Sea $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=-x^2+4x$, respectivamente.
a) Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

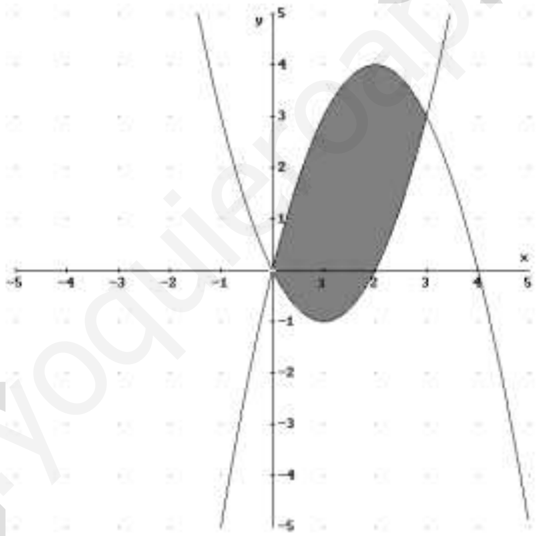
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x^2-2x=-x^2+4x\Rightarrow 2x^2-6x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=3$$

Luego, los puntos de corte son: $(0,0)$ y $(3,3)$

Hacemos un esbozo.



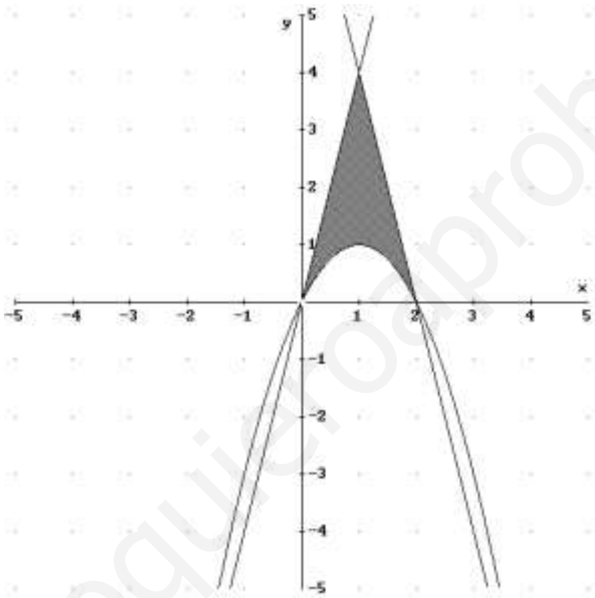
b)

$$A=\int_0^3\left[(-x^2+4x)-(x^2-2x)\right]dx=\int_0^3\left[-2x^2+6x\right]dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\right]_0^3=\left(-\frac{54}{3}+\frac{54}{2}\right)-(0)=9u^2$$

Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = 4x$, $y = 8 - 4x$ y la curva $y = 2x - x^2$.
a) Realiza un esbozo de dicho recinto.
b) Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos un esbozo.



b) $A = 2 \cdot \int_0^1 \left[(4x) - (2x - x^2) \right] dx = 2 \cdot \int_0^1 \left[2x + x^2 \right] dx = 2 \cdot \left[\frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{8}{3} u^2$

Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+b\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x=1$ y que $\int_1^4 f(x)dx=27-8\ln 4$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como tiene un extremo relativo en $x=1$, se cumple que $f'(1)=0$, luego:

$$f'(x)=2ax+\frac{b}{x}\Rightarrow f'(1)=2a\cdot 1+\frac{b}{1}=0\Rightarrow b=-2a$$

Calculamos la integral: Previamente calculamos por partes la integral de ln(x)

$$f(x)=\int \ln x\,dx=x\ln x-x$$

$$\int_1^4 ax^2-2a\ln(x)dx=\left[\frac{ax^3}{3}-2a(x\ln x-x)\right]_1^4=\left(\frac{64a}{3}-8a\ln 4+8a\right)-\left(\frac{a}{3}+2a\right)=27-8a\ln 4\Rightarrow a=1$$

Luego, los valores son: $a=1$; $b=-2$

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(-1,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=1-x^2;\ du=-2x\,dx \\ dv=e^{-x}\,dx;\ v=-e^{-x} \end{array}}$$

$$I=\int(1-x^2)e^{-x}\,dx=-e^{-x}\cdot(1-x^2)-2\int x\cdot e^{-x}\,dx$$

Volvemos a hacer la integral que nos queda por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=e^{-x}\,dx;\ v=-e^{-x} \end{array}}$$

$$I=-e^{-x}\cdot(1-x^2)-2\int x\cdot e^{-x}\,dx=-e^{-x}\cdot(1-x^2)-2\left[-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}dx\right]=$$
$$=-e^{-x}\cdot(1-x^2)+2xe^{-x}+2e^{-x}+C=e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(-1,0)$.

$$F(x)=e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)+C\Rightarrow F(-1)=0\Rightarrow F(-1)=-e^{-1}(1-2+1)+C=0\Rightarrow C=0$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)$

Sean las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ y $g(x)=2\sqrt{x}$ respectivamente.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Realiza un esbozo del recinto que limitan.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

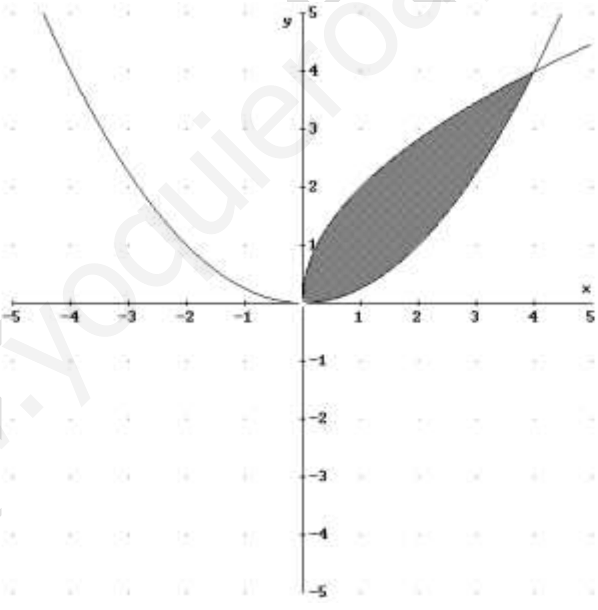
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$\frac{x^2}{4}=2\sqrt{x}\Rightarrow\frac{x^4}{16}=4x\Rightarrow x^4-64x\Rightarrow x=0\ ;\ x=4$$

Luego, los puntos de corte son: $(0,0)$ y $(4,4)$

Hacemos un esbozo.



b) $A=\int_0^4\left[(2\sqrt{x})-(\frac{x^2}{4})\right]dx=\int_0^4\left[2x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^2}{4}\right]dx=\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{12}\right]_0^4=\left(\frac{2\sqrt{64}}{\frac{3}{2}}-\frac{64}{12}\right)-(0)=\frac{16}{3}u^2$

Sea $I=\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$.

a) Expresa la integral *I* aplicando el cambio de variable $t=\sqrt{1-x}$.

b) Calcula el valor de *I*.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t=\sqrt{1-x}$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$dt=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}dx=\frac{-1}{2t}dx\Rightarrow dx=-2t\,dt$$

$$t=\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=1-x\Rightarrow x=1-t^2$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x=0\Rightarrow t=1$$

$$x=1\Rightarrow t=0$$

Sustituyendo, tenemos:

$$I=\int_1^0 \frac{(1-t^2)}{1+t}\cdot(-2t\,dt)=\int_1^0 \frac{(1+t)(1-t)}{1+t}\cdot(-2t\,dt)=\int_1^0 -2t(1-t)\,dt=\int_1^0 (-2t+2t^2)\,dt$$

b) Calculamos el valor de *I*

$$I=\int_1^0 (-2t+2t^2)\,dt=\left[-\frac{2t^2}{2}+\frac{2t^3}{3}\right]_1^0=0-\left(-1+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{9-x^2}{4}$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $x+2y=5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

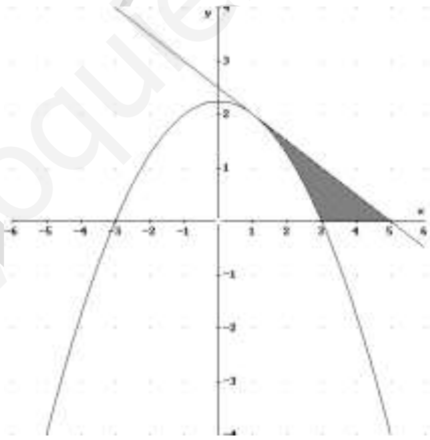
Calculamos: $f(1)=\dfrac{9-1}{4}=2$

$$f'(x)=\frac{-2x}{4}=\frac{-x}{2}\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-2=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow x+2y-5=0$$

b) Esbozamos el recinto que nos dicen



Calculamos el área del recinto

$$A=\int_1^3\left(\frac{5-x}{2}-\frac{9-x^2}{4}\right)dx+\int_3^5\left(\frac{5-x}{2}\right)dx=\int_1^3\left(\frac{x^2-2x+1}{4}\right)dx+\int_3^5\left(\frac{5-x}{2}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{\frac{x^3}{3}-x^2+x}{4}\right]_1^3+\left[\frac{5x-\frac{x^2}{2}}{2}\right]_3^5=\left(\frac{9-9+3}{4}\right)-\left(\frac{\frac{1}{3}-1+1}{4}\right)+\left(\frac{25-\frac{25}{2}}{2}\right)-\left(\frac{15-\frac{9}{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}\ u^2$$