PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2018

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = \left| x^2 - 2x \right|$.

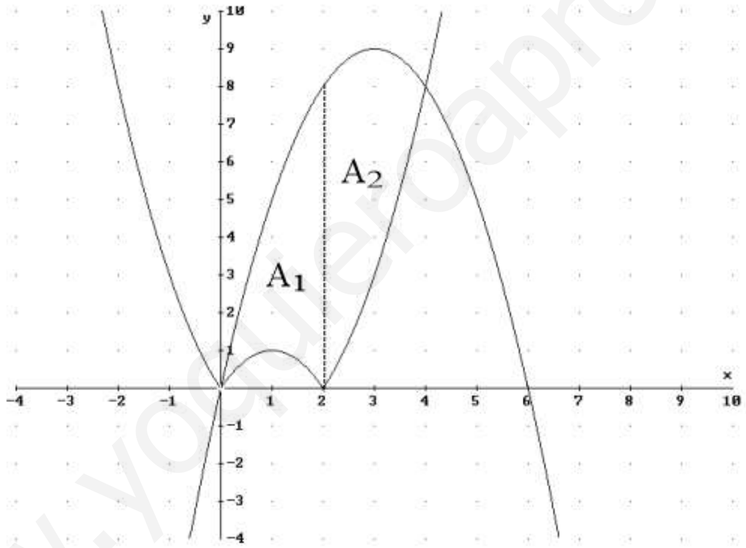
a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos la función $f(x) = 6x - x^2$ que es una parábola, calculando el vértice y haciendo una tabla de valores. Abrimos la función $g(x) = \left| x^2 - 2x \right| = \begin{cases} x^2 - 2x & si\ x \le 0 \\ -x^2 + 2x & si\ 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x & si\ x \ge 2 \end{cases}$ y hacemos el dibujo.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left. \begin{aligned} y &= 6x - x^2 \\ y &= x^2 - 2x \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ;\ x = 4$$

Luego, los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(4,8)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^2 \left[(6x - x^2) - (-x^2 + 2x) \right] dx + \int_2^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x) \right] dx =$$

$$= \int_0^2 4x\, dx + \int_2^4 (-2x^2 + 8x)\, dx = \left[2x^2 \right]_0^2 + \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 \right]_2^4 = 8 + \left(-\frac{128}{3} + 64 \right) - \left(-\frac{16}{3} + 16 \right) = \frac{56}{3}\ u^2$$

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=3-x^2$ y $g(x)=-\dfrac{x^2}{4}$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de *g*. Determina el punto de tangencia con la gráfica de *g*.

b) Esboza el recinto limitado por la recta $y=4-2x$ y las gráficas de *f* y *g*. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

En el examen original había un error. Las gráficas estaban cambiadas, es decir, *f* era *g* y *g* era *f*.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la tangente es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

Calculamos: $f(1)=3-1^2=2$

$$f'(x)=-2x \Rightarrow f'(1)=-2\cdot 1=-2$$

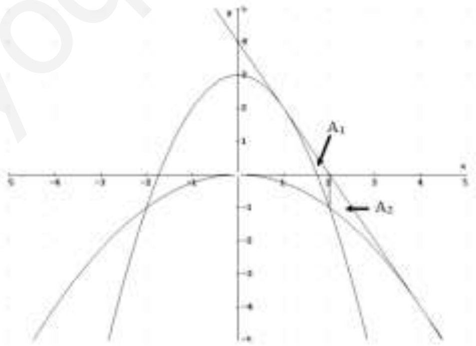
Sustituimos y calculamos la tangente: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-2=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x+4$

Comprobamos que también es tangente a *g*

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=-\dfrac{x^2}{4} \\ y=-2x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{x^2}{4}=-2x+4 \Rightarrow x^2-8x+16=0 \Rightarrow x=4$$

Luego, es tangente y el punto de tangencia es $(4,-4)$.

b) Hacemos el dibujo de las dos parábolas y la recta.



Los puntos de corte son: $(1,2)$, $(2,-1)$, $(-2,-1)$ y $(4,-4)$

c) Calculamos el área que nos piden.

$$A=A_1+A_2=\int_1^2\left[(-2x+4)-(3-x^2)\right]dx+\int_2^4\left[(-2x+4)-\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right]dx=$$

$$=\int_1^2(x^2-2x+1)\,dx+\int_2^4\left(\frac{x^2}{4}-2x+4\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{12}-x^2+4x\right]_2^4=$$

$$=\left(\frac{8}{3}-4+2\right)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)+\left(\frac{64}{12}-16+16\right)-\left(\frac{8}{12}-4+8\right)=1\ u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^{2-x}$
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta $x+y=3$.
c) Calcula el área del recinto indicado.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

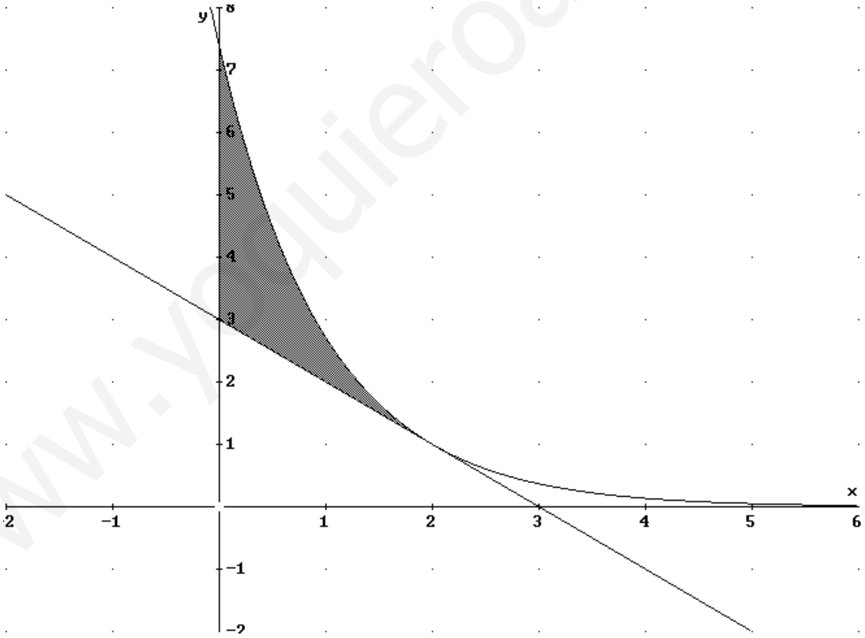
R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente será $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

- $f(2)=e^{0}=1$
- $f'(x)=-e^{2-x}\Rightarrow f'(2)=-e^{0}=-1$

Sustituyendo, tenemos que: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)\Rightarrow y-1=-1\cdot(x-2)\Rightarrow y=-x+3$

b) Dibujamos el recinto que nos dicen.



c) Calculamos el área del recinto

$$\int_0^2\left[(e^{2-x})-(-x+3)\right]dx=\int_0^2(e^{2-x}+x-3)\,dx=\left[-e^{2-x}+\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^2=\left(-e^{0}+2-6\right)-\left(-e^{2}\right)=e^{2}-5\ u^2$$

Considera la función $f:\left(-\frac{e}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(2x+e)$, donde ln denota logaritmo neperiano.
a) Haz un esbozo de la gráfica de *f* calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y los ejes de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

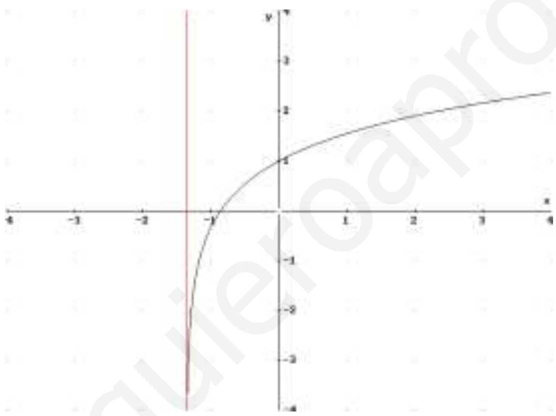
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte con los ejes.

Corte con el eje X $\Rightarrow y=0\Rightarrow \ln(2x+e)=0\Rightarrow e^{0}=2x+e\Rightarrow x=\dfrac{1-e}{2}$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=\ln e\Rightarrow y=1$

La recta $x=\dfrac{-e}{2}$ es una asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to-\frac{e}{2}}\ln(2x+e)=-\infty$



b) Calculamos la integral $\int \ln(2x+e)\,dx$ que es por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(2x+e);\ du=\dfrac{2}{2x+e}\,dx \\ dv=dx \qquad ;\quad v=x \end{array}}$$

$$\int \ln(2x+e)\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-\int\frac{2x}{2x+e}\,dx$$

La integral que sale es racional, dividimos y la hacemos

$$\int \ln(2x+e)\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-\int\frac{2x}{2x+e}\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-\int\left(1-\frac{e}{2x+e}\right)dx=$$

$$x\cdot\ln(2x+e)-\int dx+\frac{e}{2}\int\frac{2}{2x+e}\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-x+\frac{e}{2}\ln(2x+e)+C$$

Calculamos el área que nos piden.

$$\int_{\frac{1-e}{2}}^{0}\ln(2x+e)dx=\left[x\cdot\ln(2x+e)-x+\frac{e}{2}\ln(2x+e)\right]_{\frac{1-e}{2}}^{0}=\frac{e}{2}-\frac{-1+e}{2}=\frac{1}{2}\,u^{2}$$

Determina la función $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$ es $y=x+2$.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $f'(x)$

$$f'(x)=\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx=\int(x-1)^{-2}\,dx=\frac{-1}{(x-1)}+C$$

Calculamos $f(x)$

$$f(x)=\int\left(\frac{-1}{(x-1)}+C\right)dx=-\ln|x-1|+Cx+D$$

La recta tangente en el punto $x=2$ tiene de pendiente 1, es decir, que $f'(2)=1$, luego:

$$f'(2)=\frac{-1}{(2-1)}+C=1\Rightarrow C=2$$

En el punto $x=2$, la recta tangente y la función coinciden, es decir, que $f(2)=4$, luego:

$$f(2)=-\ln|2-1|+2\cdot 2+D=4\Rightarrow D=0$$

Luego, la función que nos piden es: $f(x)=-\ln|x-1|+2x$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

a) Calcula $\int f(x)\,dx$

b) Encuentra la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I=\int x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=\cos\frac{x}{2}dx;\ v=2\,sen\frac{x}{2} \end{array}}$$

$$F(x)=\int x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=2x\cdot sen\frac{x}{2}-2\int sen\frac{x}{2}dx=2x\cdot sen\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$$

Calculamos la constante:

$$F(0)=1\Rightarrow 2\cdot 0\cdot sen0+4\cos 0+C=1\Rightarrow C=1-4=-3$$

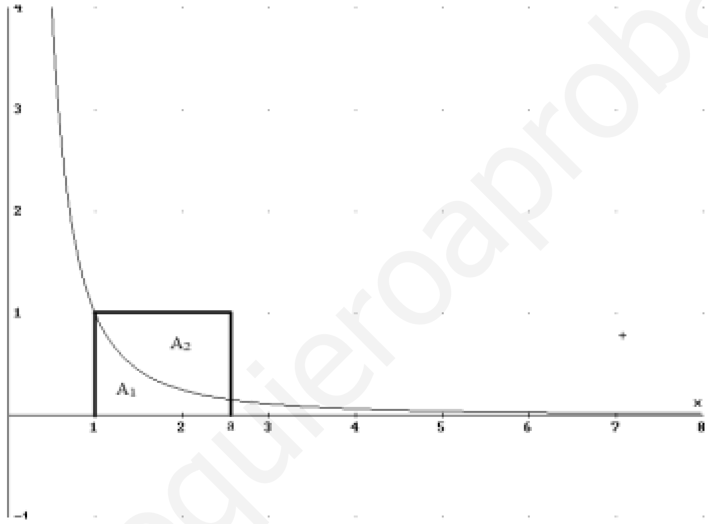
Por lo tanto, la primitiva que nos piden es:

$$F(x)=2x\cdot sen\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}-3$$

Siendo $a > 1$, considera el rectángulo de vértices $A(1,0), B(1,1), C(a,1)$ y $D(a,0)$. La gráfica de la función *f* definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x \neq 0$ divide al rectángulo anterior en dos recintos.
a) Haz un esbozo de la gráfica de *f* y del rectángulo descrito.
b) Determina el valor de *a* para el que los dos recintos descritos tienen igual área.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo



b) Calculamos el área de dicho recintos.

El área del primer recinto es:

$$A_1 = \int_1^a \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \left(-\frac{1}{a}\right) - (-1) = -\frac{1}{a} + 1 \ u^2$$

El área del segundo recinto es igual al área del rectángulo menos el área del primer recinto:

$$A_2 = (a-1) + \frac{1}{a} - 1 = a + \frac{1}{a} - 2 \ u^2$$

Igualando las dos áreas tenemos que:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow -\frac{1}{a} + 1 = a + \frac{1}{a} - 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \ ; \ a = 1$$

Luego, el valor que nos piden es $a = 2$, ya que $a > 1$

Calcula $\int_{0}^{\ln 2} \frac{1}{1+e^{x}}\, dx$ donde ln denota logaritmo neperiano (sugerencia $t=e^{x}$).

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral indefinida con el cambio que nos dicen: $e^{x}=t \Rightarrow e^{x}dx=dt$

$$\int \frac{1}{1+e^{x}}\, dx=\int \frac{1}{1+t}\cdot \frac{dt}{t}=\int \frac{1}{(1+t)\cdot t}\, dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(1+t)\cdot t}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{t}=\frac{A\cdot t+B(1+t)}{(1+t)\cdot t}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A y B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$t=-1 \Rightarrow 1=-A \Rightarrow A=-1$$

$$t=0 \Rightarrow 1=B$$

Con lo cual:

$$\int \frac{1}{(1+t)\cdot t}\, dt=\int \frac{-1}{1+t}dt+\int \frac{1}{t}dt=-\ln|1+t|+\ln|t|+C=-\ln|1+e^{x}|+\ln|e^{x}|+C$$

Calculamos la integral definida que nos pedían

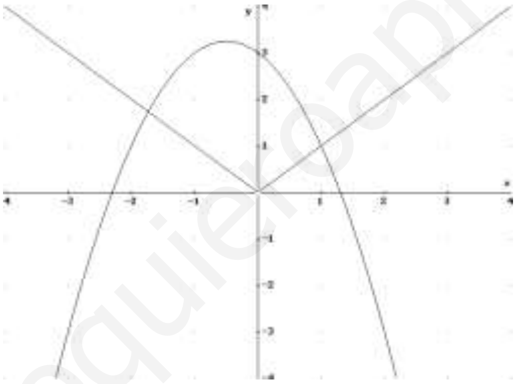
$$\int_{0}^{\ln 2} \frac{1}{1+e^{x}}\, dx=\left[-\ln|1+e^{x}|+\ln|e^{x}|\right]_{0}^{\ln 2}=\left[-\ln 3+\ln 2\right]-\left[-\ln 2+\ln 1\right]=2\ln 2-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -x^2 - x + 3$ y $g(x) = |x|$.
a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.
b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = -x^2 - x + 3$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right)$ y corta al eje X en los puntos $\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, 0\right)$.

La función $g(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ son dos rectas, que son la bisectriz del 1º y 3^{er} cuadrante.



Calculamos los puntos de corte de las gráficas.

$-x^2 - x + 3 = x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$; $x = -3$. Sólo sirve $x = 1$

$-x^2 - x + 3 = -x \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Sólo sirve $x = -\sqrt{3}$

b)

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{0} \left[(-x^2 - x + 3) - (-x)\right] dx + \int_{0}^{1} \left[(-x^2 - x + 3) - (x)\right] dx = \int_{\sqrt{3}}^{0} (-x^2 + 3)\, dx + \int_{0}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x\right]_{-\sqrt{3}}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{0}^{1} = -\left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - 3\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) = 2\sqrt{3} + \frac{5}{3} = 5'13\ u^2$$

Se sabe que la función $f:[0,+\infty]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax} & si \quad 0\le x\le 8\\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & si \quad x>8\end{cases}$ es continua.

a) Determina a.

b) Para $a=8$, calcula $\int_0^{10} f(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 8^-}\sqrt{ax}=\sqrt{8a}\\ \lim\limits_{x\to 8^+}\dfrac{x^2-32}{x-4}=8\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{8a}=8\Rightarrow a=8$$

b) $$\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^8\sqrt{8x}\,dx+\int_8^{10}\frac{x^2-32}{x-4}\,dx$$

$$I_1=\int_0^8\sqrt{8x}\,dx=\sqrt{8}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\sqrt{8}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8=\frac{128}{3}$$

$$I_2=\int_8^{10}\frac{x^2-32}{x-4}\,dx$$

Como el polinomio del numerador tiene mayor grado que el polinomio del denominador, lo primero que hacemos es dividir, con lo cual:

$$\int\frac{x^2-32}{x-4}\,dx=\int(x+4)dx+\int\frac{-16}{x-4}\,dx=\frac{x^2}{2}+4x-16\ln|x-4|$$

$$I_2=\int_8^{10}\frac{x^2-32}{x-4}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+4x-16\ln|x-4|\right]_8^{10}=\left[(50+40-16\ln 6)-(32+32-16\ln 4)\right]=26-16\ln\frac{3}{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^8\sqrt{8x}\,dx+\int_8^{10}\frac{x^2-32}{x-4}\,dx=\frac{128}{3}+26-16\ln\frac{3}{2}=\frac{206}{3}-16\ln\frac{3}{2}$$

Considera la función f definida por $f(x) = a\,x\ln(x) - b\,x$ para $x > 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que $\int_1^2 f(x)\,dx = 8\ln(2) - 9$

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = a\ln(x) + a - b$

Extremo relativo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$

Vamos a calcular la integral $I = \int (ax \cdot ln\,x - ax)\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln x;\ du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = ax\,dx;\ v = \dfrac{ax^2}{2} \end{array}}$$

$$I = \int (ax \cdot ln\,x - ax)\,dx = \frac{ax^2}{2} \cdot ln\ x - \frac{1}{2}\int ax\,dx - \frac{ax^2}{2} = \frac{ax^2}{2} \cdot ln\ x - \frac{1}{2}\left(\frac{ax^2}{2}\right) - \frac{ax^2}{2} = \frac{ax^2}{2} \cdot ln\ x - \frac{3ax^2}{4}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{ax^2 \ln x}{2} - \frac{3ax^2}{4}\right]_1^2 = \left[\frac{4a\ln 2}{2} - \frac{12a}{4}\right] - \left[-\frac{3a}{4}\right] = \frac{4a\ln 2}{2} - \frac{9a}{4} = 8\ln(2) - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a\ln 2 - \frac{9a}{4} = 8\ln 2 - 9 \Rightarrow a = 4$$

Luego, $a = b = 4$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-2x}$.
a) Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y=-2ex$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $y=-2ex$ y el eje de ordenadas.
c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

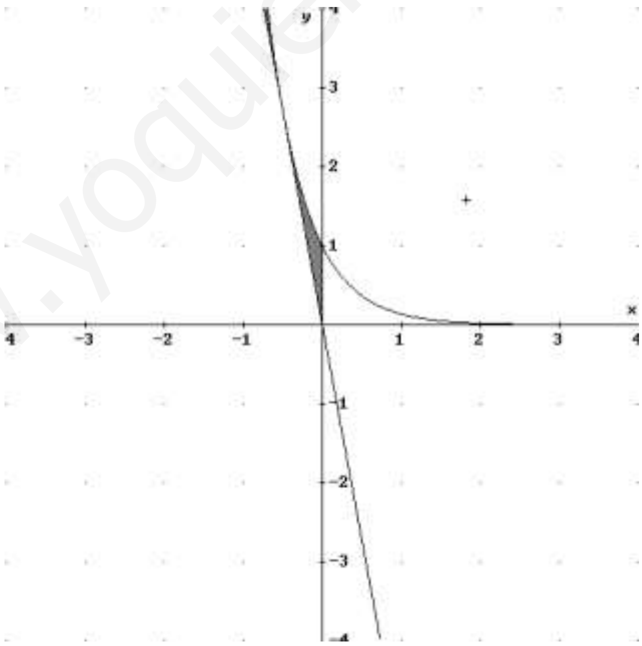
R E S O L U C I Ó N

a) La pendiente de la recta tangente es $-2e$. Calculamos la derivada de la función y la igualamos a $-2e$

$$f'(x)=-2e^{-2x}=-2e\Rightarrow e^{-2x}=e\Rightarrow -2x=1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Luego, el punto es: $\left(-\frac{1}{2},e\right)$

b) Hacemos el dibujo



c) Calculamos el área del recinto:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(e^{-2x}+2ex\right)dx=\left[-\frac{e^{-2x}}{2}+ex^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{e}{2}+\frac{e}{4}\right)=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}\ u^2$$