

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = e^x$)
MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \int \frac{1+t}{(1-t) \cdot t} dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1+t}{(1-t) \cdot t} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{t} = \frac{A \cdot t + B(1-t)}{(1-t) \cdot t}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$t=0 \Rightarrow 1=B \Rightarrow B=1$$

$$t=1 \Rightarrow 2=A \Rightarrow A=2$$

Con lo cual:

$$\int \frac{1+t}{(1-t) \cdot t} dt = \int \frac{2}{1-t} dt + \int \frac{1}{t} dt = -2 \ln|1-t| + \ln|t| + C = -2 \ln|1-e^x| + \ln|e^x| + C = -2 \ln|1-e^x| + x + C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(1,1)$.

$$1 = -2 \ln|1-e^1| + 1 + C \Rightarrow C = 2 \ln|1-e|$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = -2 \ln|1-e^x| + x + 2 \ln|1-e|$

Considera las funciones $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x+2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

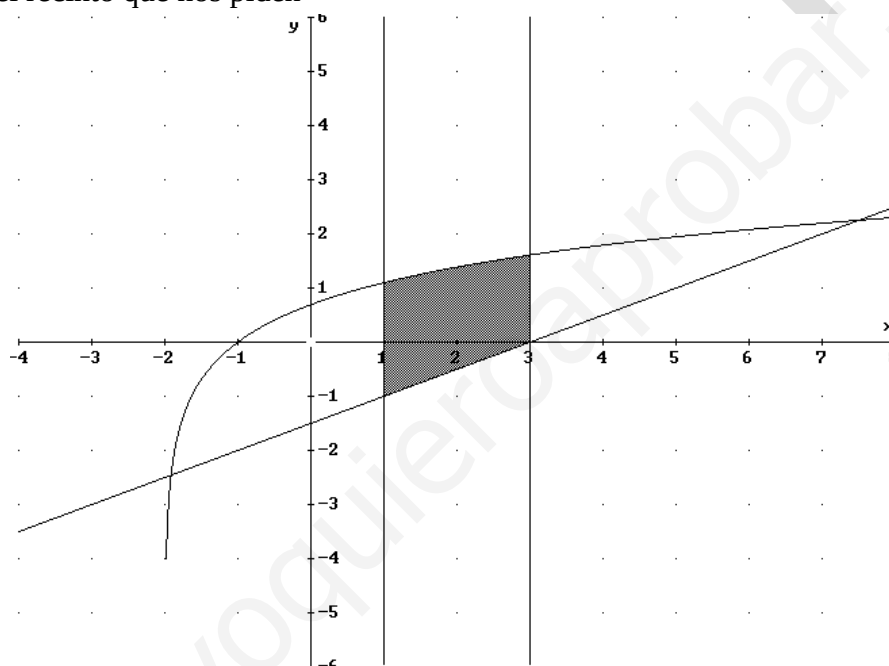
a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f , la gráfica de g , la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

b) Determina el área del recinto anterior.

MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) Dibujamos el recinto que nos piden



b) Calculamos

$$\int \ln(x+2) dx = x \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2} dx = x \ln(x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2) + C$$

$$u = \ln(x+2); du = \frac{1}{x+2} dx$$

$$dv = dx; v = x$$

El área que nos piden es:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 \left[\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3) \right] dx = \left[x \ln|x+2| - x + 2 \ln|x+2| - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \right]_1^3 = \\ &= \left(3 \ln|5| - 3 + 2 \ln|5| - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} \right) - \left(\ln|3| - 1 + 2 \ln|3| - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) = 3,75 u^2 \end{aligned}$$

Calcula $\int \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) dx$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral, por partes:

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \cdot \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx$$

$$u = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right); du = \frac{\frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2+1)}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}} dx = \frac{x^2-1}{x \cdot (x^2+1)} dx$$

$$dv = dx; v = x$$

$$\int \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) dx = x \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int x \cdot \frac{x^2-1}{x \cdot (x^2+1)} dx = x \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int \frac{x^2-1}{(x^2+1)} dx$$

La integral que nos queda es una integral racional, hacemos la división y nos queda:

$$\begin{aligned} \int \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) dx &= x \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int \frac{x^2-1}{(x^2+1)} dx = x \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int 1 - \frac{2}{(x^2+1)} dx = \\ &= x \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - x + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C \end{aligned}$$

Sean las funciones $f, g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{sen} 2x$

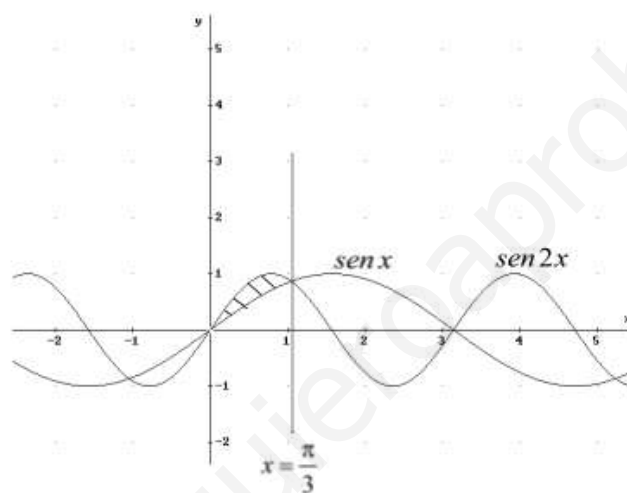
a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a)



Calculamos los puntos de corte en $[0, \pi]$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x \Rightarrow \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \Rightarrow \operatorname{sen} x (1 - 2 \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1 - 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

b) Calculamos el área que nos piden:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \right) - \left(-\frac{1}{2} \cos 0 + \cos 0 \right) = \\ &= \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \right) = \frac{1}{4} u^2 \end{aligned}$$

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$ para $x \neq 1, -1$.

a) Halla todas las funciones primitivas de f .

b) Calcula la primitiva que pasa por $(2, 0)$.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^4}{x^2 - 1} dx = \int (x^2 + 1) dx + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^4}{x^2 - 1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x + 1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + C$$

b) Calculamos la primitiva que pasa por $(2, 0)$

$$F(2) = 0 \Rightarrow \frac{2^3}{3} + 2 + \frac{1}{2} \ln|2 - 1| - \frac{1}{2} \ln|2 + 1| + C = 0 \Rightarrow \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{2} \ln 3 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{14}{3} + \frac{1}{2} \ln 3$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| - \frac{14}{3} + \frac{1}{2} \ln 3$

Considera las funciones $f, g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \sin(x)$.

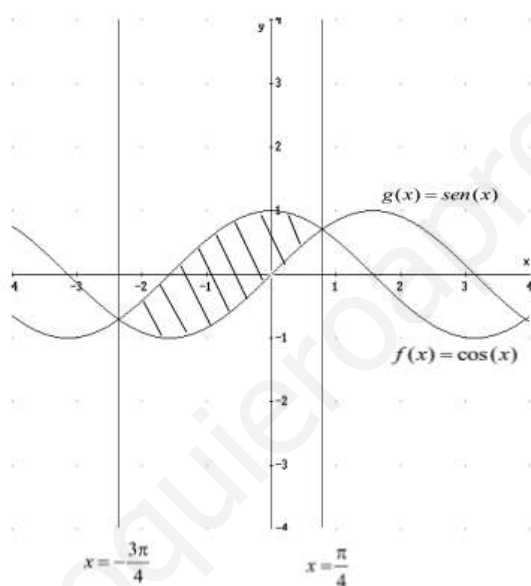
a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

b) Calcula el área del recinto delimitado por las gráficas de f y de g en el intervalo $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Representamos gráficamente las dos funciones:



Calculamos los puntos de corte. Resolvemos la ecuación:

$$\cos(x) = \sin(x) \Rightarrow \frac{\cos(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow 1 = \tan(x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Las soluciones que nos interesan son las que están en el intervalo $[-\pi, \pi]$, luego son: $x = -\frac{3\pi}{4}$ y

$$x = \frac{\pi}{4}$$

b) Calculamos el área que nos piden

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left[\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right] - \left[\sin \frac{-3\pi}{4} + \cos \frac{-3\pi}{4} \right] = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Dado un número real $a > 0$, considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - ax$, y la recta $y = 2ax$. Determina a sabiendo que el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta anterior es 36.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2ax \\ y = x^2 - ax \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - ax = 2ax \Rightarrow x^2 - 3ax = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 3a .$$

Vemos que función va por encima y cual por debajo.

$$x = a \Rightarrow \begin{cases} y = 2ax = 2a^2 \\ y = x^2 - ax = a^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

Va por encima la recta y por debajo la parábola.

Luego:

$$36 = \int_0^{3a} (2ax - x^2 + ax) dx = \int_0^{3a} (3ax - x^2) dx = \left[\frac{3ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{3a} = \left[\frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{3} \right] = \frac{27a^3}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27a^3 = 216 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

Sea $f : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea F la primitiva de f que cumple $F(0) = \frac{\pi}{3}$ y

$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pi$. Calcula:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3f(x) - \cos(x)) dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}(F(x)) f(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

RESOLUCIÓN

a)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (3f(x) - \cos(x)) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 3f(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x) dx = 3[F(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} - [\operatorname{sen}(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = \\ &= 3\left[F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0)\right] - \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}(0)\right] = 3\left[\pi - \frac{\pi}{3}\right] - \left[\frac{1}{2} - 0\right] = 2\pi - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}(F(x)) f(x) dx &= [-\cos(F(x))]_0^{\frac{\pi}{6}} = \left[-\cos\left(F\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - (-\cos(F(0)))\right] = \left[-\cos(\pi) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right] = \\ &= -(-1) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 8 & \text{si } x \leq 4 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

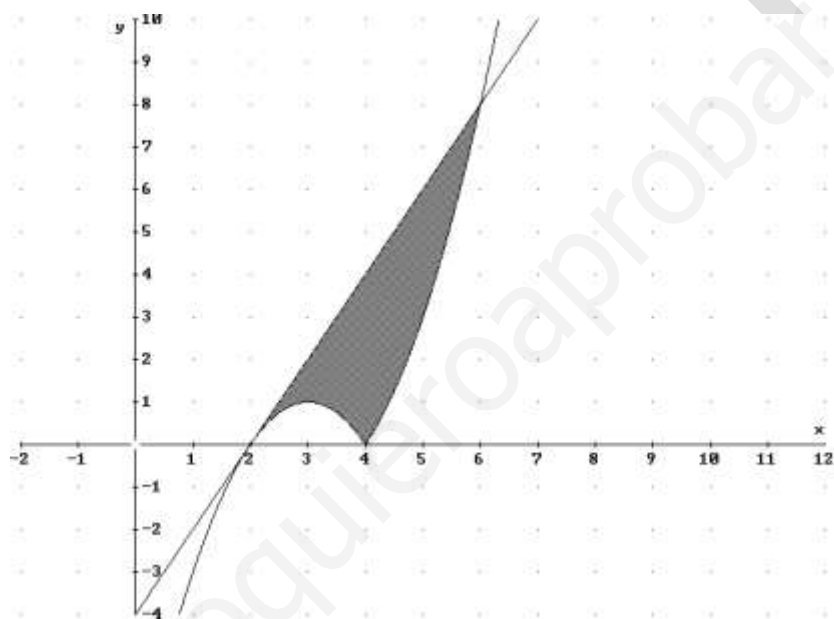
a) Calcula los puntos de corte entre la gráfica de f y la recta $y = 2x - 4$. Esboza el recinto que delimitan la gráfica de f y la recta.

b) Calcula el área del recinto anterior.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 4 \\ y = -x^2 + 6x - 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 4 = -x^2 + 6x - 8 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 4 \\ y = x^2 - 6x + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 4 = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = 6 \Rightarrow (6, 8)$$

El valor $x = 2$ no sirve ya que está fuera de su dominio. Luego los puntos de corte son: $(2, 0)$ y $(6, 8)$

b) Calculamos el área que nos piden.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^4 [(2x - 4) - (-x^2 + 6x - 8)] dx + \int_4^6 [(2x - 4) - (x^2 - 6x + 8)] dx = \\ &= \int_2^4 (x^2 - 4x + 4) dx + \int_4^6 (-x^2 + 8x - 12) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_2^4 + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 12x \right]_4^6 = \\ &= \left[\left(\frac{64}{3} - 32 + 16 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 8 \right) \right] + \left[\left(-\frac{216}{3} + 144 - 72 \right) - \left(-\frac{64}{3} + 64 - 48 \right) \right] = 8 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -4x^2 + a$, siendo $a > 0$ un número real. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 0$. Calcula a sabiendo que el área del recinto es 18.

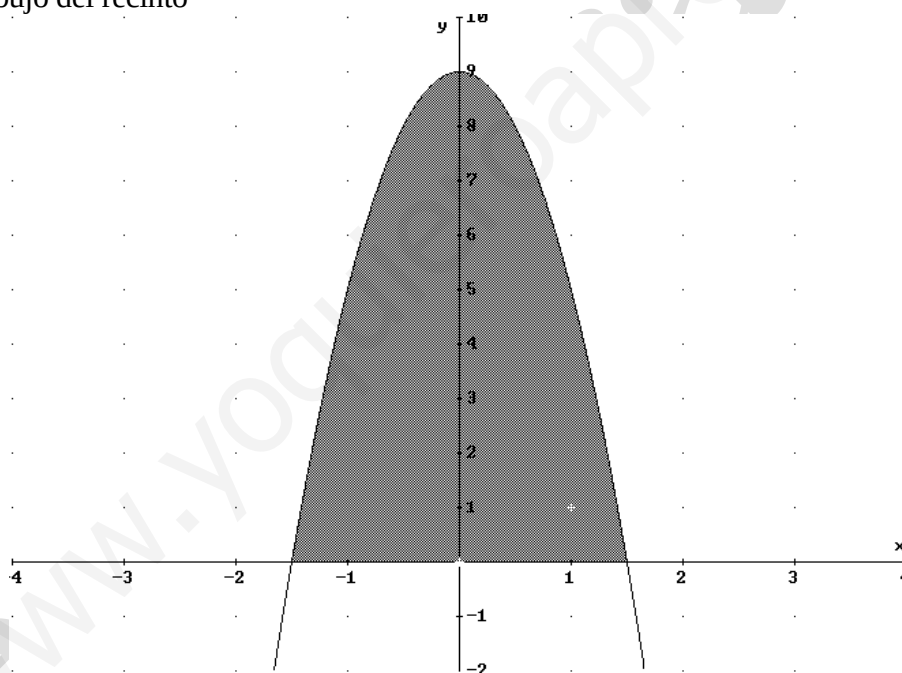
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

RESOLUCIÓN

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x^2 + a \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -4x^2 + a = 0 \Rightarrow 4x^2 = a \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{a}}{2}$$

Hacemos el dibujo del recinto



Calculamos el área que nos piden

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} (-4x^2 + a) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} (-4x^2 + a) dx = 2 \left[-\frac{4x^3}{3} + ax \right]_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} = 2 \cdot \left[-\frac{4 \left(\frac{\sqrt{a}}{2} \right)^3}{3} + a \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{2} \right) \right] = 18 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2 \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{a^3}}{8} + 2 \cdot \frac{\sqrt{a^3}}{2} = 18 \Rightarrow -\frac{\sqrt{a^3}}{3} + \sqrt{a^3} = 18 \Rightarrow \frac{2\sqrt{a^3}}{3} = 18 \Rightarrow \sqrt{a^3} = 27 \Rightarrow a = 9 \end{aligned}$$

Determina la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 0)$.

MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral $f(x) = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$, que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} u &= \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv &= \frac{dx}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} dx; \quad v = 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$f(x) = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot \sqrt{x} \ln x - \int \frac{2 \cdot \sqrt{x}}{x} dx = 2 \cdot \sqrt{x} \ln x - \int 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot \sqrt{x} \ln x - 4 \cdot \sqrt{x} + C$$

Calculamos la constante:

$$0 = 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) - 4 + C \Rightarrow C = 4$$

Por lo tanto, la función que nos piden es:

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \ln x - 4 \cdot \sqrt{x} + 4$$

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y los valores que se alcanzan).

b) Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte

Corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Luego, la función corta en el punto $(0, 0)$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot x = e^{-x^2} (1 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$
Signo y'	-	+	-
Función	D	C	D

La función es creciente en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ y decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$

Tiene un mínimo en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y un máximo en $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$

b) Calculamos el área

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} = \int_0^a x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^a -2x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^a \Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \left[e^{-a^2} - 1 \right] \Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} e^{-a^2} \Rightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} e^{-a^2} \Rightarrow e^{-a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln e^{-a^2} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow -a^2 = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow -a^2 = \ln 1 - \ln 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -a^2 = -\ln 2 \Rightarrow a = \sqrt{\ln 2} = 0.8325 \end{aligned}$$