

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Se sabe que la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{x^2 + a}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es

continua en $(-1, +\infty)$.

a) Halla el valor de a . ¿Es f derivable en $x = 0$?

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función es continua en $(-1, +\infty)$ debe serlo en $x = 0$, luego:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 4x + 3 &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + a}{x + 1} &= \frac{a}{1} = a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 3$$

Vamos a ver si es derivable en $x = 0$. Calculamos la función derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= -4 \\ f'(0^+) &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo f'	-	-	+
Función	D	D	C

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$.

a) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f . ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f ?

MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente será: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 \Rightarrow f'(1) = -2$$

luego, sustituyendo, tenemos que la recta tangente es: $y - 0 = -2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2$

La ecuación de la normal será: $y - 0 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = \frac{x-1}{2}$

b) Calculamos la segunda derivada.

$$f''(x) = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
Signo f''	-	+
Función	Cn	Cx

↓
P.I. $\left(\frac{2}{3}, \frac{20}{27}\right)$

Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x (\cos x + \operatorname{sen} x)$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) Halla los extremos relativos (locales) y absolutos (globales) de f .

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = 2e^x \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} ; x = \frac{3\pi}{2}$

	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
Signo y'	+	−	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$
 Máximo $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ mínimo $\left(\frac{3\pi}{2}, -e^{\frac{3\pi}{2}}\right)$

El máximo absoluto es $(2\pi, e^{2\pi})$ y el mínimo absoluto es $\left(\frac{3\pi}{2}, -e^{\frac{3\pi}{2}}\right)$

Se sabe que la función $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \frac{1}{2}x + c & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo $(-1,1)$.

a) Determina el valor de la constante c .

b) Calcula la función derivada f' .

c) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que son paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable en $x = 0$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x^2 - \frac{1}{2}x + c &= c \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = 1$$

b) La función derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 4x - \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

c) Si son paralelas a la recta $y = -x \Rightarrow m = -1$, luego:

$$4x - \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{8} ; y = 2x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{35}{32}$$

Luego, la recta tangente es: $y - \frac{35}{32} = -1 \left(x + \frac{1}{8} \right) \Rightarrow 32x + 32y - 31 = 0$

$$\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{4} ; y = \sqrt{1-x} = \frac{1}{2}$$

Luego, la recta tangente es: $y - \frac{1}{2} = -1 \left(x - \frac{3}{4} \right) \Rightarrow 4x + 4y - 5 = 0$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ que es paralela a la recta $-4x + y + 3 = 0$.

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(2, 0)$.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente será: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Como tiene que ser paralela a la recta $-4x + y + 3 = 0 \Rightarrow m = f'(x_0) = 4 = 2x_0 \Rightarrow x_0 = 2$, y $f(x_0) = 2^2 = 4$, luego, sustituyendo, tenemos que la recta tangente es:

$$y - 4 = 4 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$$

b) La ecuación de todas las rectas tangentes será: $y - a^2 = 2a \cdot (x - a)$; y como queremos que pasen por el punto $(2, 0)$, tenemos:

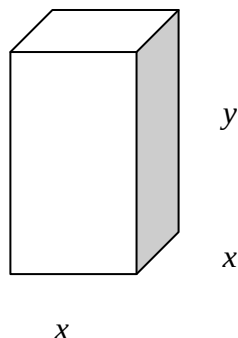
$$0 - a^2 = 2a \cdot (2 - a) \Rightarrow a^2 - 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$a = 0 \Rightarrow y - 0 = 2 \cdot 0 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 0$$

$$a = 4 \Rightarrow y - 16 = 2 \cdot 4 \cdot (x - 4) \Rightarrow y = 8x - 16$$

Se quiere fabricar una caja abierta de chapa con base cuadrada y con 32 litros de capacidad. Halla las dimensiones de la caja que precisa la menor cantidad de chapa.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



- a) La función que queremos que sea mínimo es: $Superficie_{\min} = x^2 + 4 \cdot x \cdot y$
- b) Relación entre las variables: $32 = x^2 \cdot y \Rightarrow y = \frac{32}{x^2}$
- c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$Superficie_{\min} = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x} = \frac{x^3 + 128}{x}$$

- d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{3x^3 - x^3 - 128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Luego, las dimensiones son: $x = 4 \text{ dm}$; $y = 2 \text{ dm}$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2 - x|x|$.

a) Esboza la gráfica de f .

b) Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$.

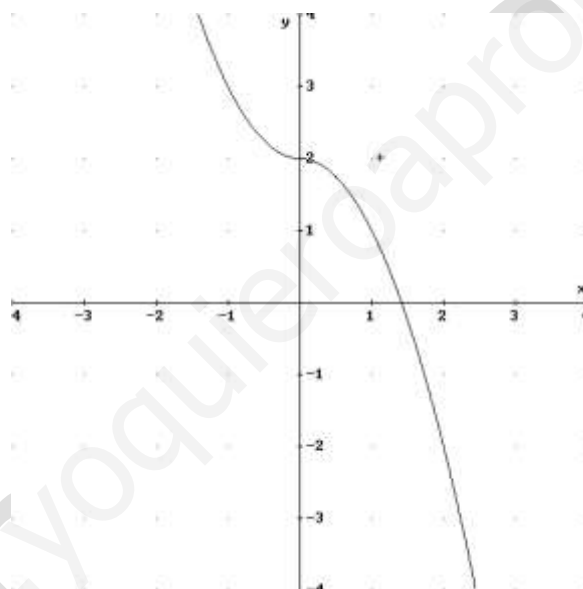
c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función y dibujarla

$$f(x) = 2 - x|x| = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



b) Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ -2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Vamos a estudiar la derivabilidad en $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Si es derivable en } x = 0$$

c) La ecuación de la recta tangente será: $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

$$f(2) = -2$$

$$f'(2) = -4$$

luego, sustituyendo, tenemos que la recta tangente es: $y + 2 = -4 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -4x + 6$

Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$ es finito. Determina el valor de a y calcula el límite.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - ae^x + a}{2x(e^x - 1)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - ae^x}{2(e^x - 1) + 2xe^x} \Rightarrow 2 - ae^x = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - ae^x + a}{2x(e^x - 1)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - ae^x}{2(e^x - 1) + 2xe^x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ae^x}{2e^x + 2e^x + 2xe^x} = \frac{-a}{4} = -\frac{1}{2}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f .

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) Esboza la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$, no tiene asíntota vertical ya que su dominio es $\mathbb{R}$.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y = 0$.

Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

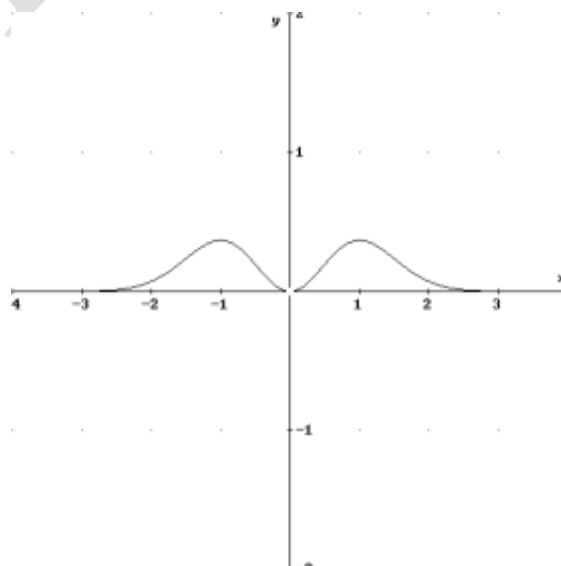
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y' = \frac{2x \cdot e^{x^2} - 2x \cdot e^{x^2} \cdot x^2}{(e^{x^2})^2} = \frac{2x - 2x^3}{e^{x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 1 ; x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo y'	+	-	+	-
Función	C	D	C	D

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 Máximo $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ mínimo $(0, 0)$ Máximo $\left(1, \frac{1}{e}\right)$

c)



Halla una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que su gráfica pase por el punto $M(0,1)$, que la tangente en el punto M sea paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$ y que $f''(x) = 3x^2$.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La función que queremos averiguar será de la forma: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Calculamos la primera y segunda derivada.

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \quad ; \quad f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Aplicamos las condiciones del problema:

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c = 3x^2 \Rightarrow \begin{cases} 12a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \\ 6b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 2c = 0 \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

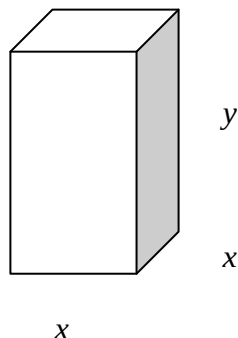
$$f'(0) = 2 \Rightarrow 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 2 \Rightarrow d = 2$$

$$\text{Pasa por } M(0,1) \Rightarrow f(0) = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 1 \Rightarrow e = 1$$

Luego, la función pedida será: $f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + 1$

Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3 . Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1€/cm^2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.
MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínimo es: $\text{Coste}_{\min} = 1'5 \cdot x^2 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot 4xy = 2'5 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $80 = x^2 \cdot y \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

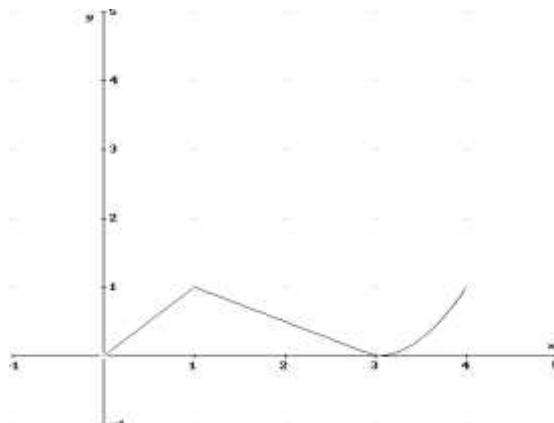
$$\text{Coste}_{\min} = 2'5 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{80}{x^2} = 2'5 \cdot x^2 + \frac{320}{x} = \frac{2'5 \cdot x^3 + 320}{x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$C' = \frac{7'5 \cdot x^3 - 2'5 \cdot x^3 - 320}{x^2} = \frac{5 \cdot x^3 - 320}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Luego, las dimensiones son: $x = 4 \text{ cm}$; $y = 5 \text{ cm}$

De una función $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(1) = 3$ y que la gráfica de su función derivada es la que aparece en el dibujo.



- Halla la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . ¿En qué punto alcanza la función su máximo absoluto.
- Estudia la concavidad y convexidad de f .

MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

- a) De la gráfica de la función $f'(x)$, vemos que $f'(1) = 1$, luego, la ecuación de la tangente será:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 3 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = x + 2$$

- b) De la gráfica de la función $f'(x)$, vemos que siempre es positiva, luego, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $[0, 4]$ y, por lo tanto no tiene máximos ni mínimos relativos. Como es creciente el máximo absoluto está en $x = 4$.

c)

$$(0, 1) \Rightarrow f'(x) \text{ es creciente} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Convexa}$$

$$(1, 3) \Rightarrow f'(x) \text{ es decreciente} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Cóncava}$$

$$(3, 4) \Rightarrow f'(x) \text{ es creciente} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Convexa}$$

Luego, $x = 1$ y $x = 3$ son puntos de inflexión.