EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2005

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo en $x=-1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x=-2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=0$. Calcula *a*, *b*, *c* y *d* sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 9.
MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Al ser polinómica la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ su dominio es $\mathbb{R}$, por lo tanto, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ ;\ f''(x)=6ax+2b$$

Máximo en $x=-1\Rightarrow f'(-1)=0\Rightarrow 3a-2b+c=0$
Corta al eje OX en $x=-2\Rightarrow f(-2)=0\Rightarrow -8a+4b-2c+d=0$
Punto de inflexión en $x=0\Rightarrow f''(0)=0\Rightarrow 2b=0$
La tangente en $x=2$ tiene de pendiente 9 $\Rightarrow f'(2)=9\Rightarrow 12a+4b+c=9$

Resolviendo el sistema formado por las 4 ecuaciones que hemos obtenido: $\left.\begin{array}{l} 3a-2b+c=0 \\ -8a+4b-2c+d=0 \\ 2b=0 \\ 12a+4b+c=9 \end{array}\right\}$

Resulta: $a=1$; $b=0$; $c=-3$; $d=2$

Sea *f* la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtiene y los valores que alcanza la función).
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función *f(x)* es R $-\{0\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$

Asíntotas Horizontales: No tiene ya que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty$

Asíntota Oblicua: La ecuación es $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1 \, ; \quad n = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x} - 1x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

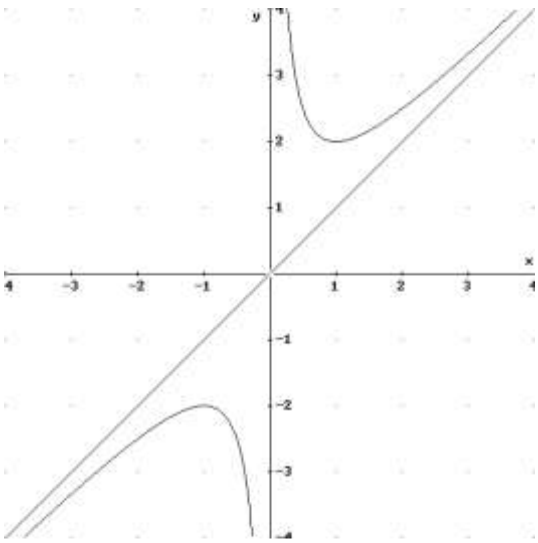
Luego es: $y = x$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \dfrac{x^2-1}{x^2}$; $y' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	+	$-$	$-$	+
Función	C	D	D	C

$\downarrow$ Máximo$(-1,-2)$ $\downarrow$ No existe $\downarrow$ mínimo$(1,2)$

c)



Sea f la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.
a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
c) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f.
d) Esboza la gráfica de f.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x = 1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{e^{\infty}}{\infty} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1} = \infty \Rightarrow$ No tiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty}}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Luego, $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 2$

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	$-$	$-$	$+$
Función	D	D	C

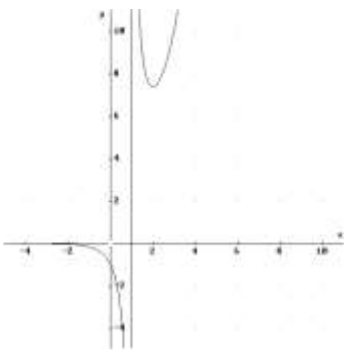
$\downarrow$ No existe $\quad\downarrow$ mínimo $(2, e^2)$

c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $y'' = \dfrac{e^x(x^2-4x+5)}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow No$

	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	$-$	$+$
Función	Cn	Cx

$\downarrow$ No existe

d)



Determina los puntos de la parábola de ecuación $y = 5 - x^2$ que están más próximos al origen de coordenadas. Calcula la distancia entre los puntos obtenidos y el origen de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Cualquier punto P de la parábola tendrá de coordenadas $P = (a, 5 - a^2)$, y el origen de coordenadas es el punto $O = (0,0)$. Queremos que sea mínima la distancia entre estos dos puntos, luego tiene que ser mínimo el módulo del vector que une esos dos puntos.

$$\vec{OP} = (a, 5 - a^2)$$

$$D_{\min} = \sqrt{a^2 + (5 - a^2)^2} = \sqrt{a^4 - 9a^2 + 25}$$

$$D'_{\min} = \frac{4a^3 - 18a}{2\sqrt{a^4 - 9a^2 + 25}} = 0 \Rightarrow x = 0; x = \frac{3}{\sqrt{2}}; x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Calculamos la segunda derivada para ver que valor de los obtenidos corresponde al mínimo.

$$D'' = \frac{2a^6 - 27a^4 + 150a^2 - 225}{\sqrt{(a^4 - 9a^2 + 25)^3}}$$

$D''(0) = -\frac{9}{5} < 0 \Rightarrow$ Máximo

$D''\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{36\sqrt{19}}{19} > 0 \Rightarrow$ mínimo

$D''\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{36\sqrt{19}}{19} > 0 \Rightarrow$ mínimo

Luego los puntos que están a mínima distancia son: $P_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ y $P_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

La distancia es: $\frac{\sqrt{19}}{2}\ u$

Se sabe que $\lim_{x \to 0} \frac{x - \alpha\, sen x}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como $\lim_{x \to 0} \frac{x - \alpha\, sen x}{x^2} = \frac{0}{0}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \alpha\, sen x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \alpha \cos x}{2x} = \frac{1 - \alpha}{0}$$

Como nos dicen que el límite es finito deberíamos haber obtenido $\frac{0}{0}$, con lo cual, $1 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

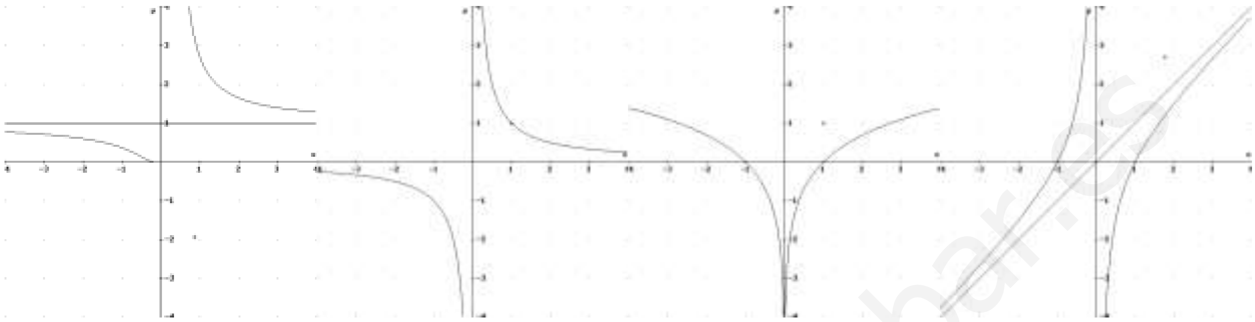
Ahora, calculamos cuanto vale el límite para $\alpha = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \alpha\, sen x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \alpha \cos x}{2x} = \frac{1 - \alpha}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Considera las tres funciones cuyas expresiones respectivas vienen dadas, para $x \neq 0$, por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \;;\; g(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad y \quad h(x) = Ln|x|$$

siendo Ln la función logaritmo neperiano.
a) Halla las ecuaciones de las asíntotas de las gráficas de *f*, *g* y *h*.
b) Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.



Gráfica 1 Gráfica 2 Gráfica 3 Gráfica 4

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

El dominio de la función *f(x)* es $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \to 0} f(x) = \pm\infty$

Asíntotas Horizontales: No tiene ya que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

Asíntota Oblicua: La ecuación es $y = mx + n$: Luego es: $y = x$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x}{x^2} = 1 ;\; n = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 1}{x} - 1x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1 + x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{x} = 0$$

Por lo tanto, su dibujo corresponde a la gráfica 4.

El dominio de la función $g(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = e^0 = 1$, luego es $y = 1$

Asíntota Oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

Por lo tanto, su dibujo corresponde a la gráfica 1.

El dominio de la función $h(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntotas Verticales: La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \to 0} h(x) = -\infty$

Asíntotas Horizontales: No tiene ya que $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \infty$

Asíntota Oblicua: No tiene, ya que:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln|x|}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 ;\; n = \lim_{x \to \infty} \left[\ln|x| - 0 \cdot x \right] = \lim_{x \to \infty} \ln|x| = \infty$$

Por lo tanto, su dibujo corresponde a la gráfica 3.

De la función $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$ se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ viene dada por $y=-2$.
a) Calcula *a* y *b*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función.

$$f'(x)=\frac{2ax\cdot x-1\cdot(ax^2+b)}{x^2}=\frac{ax^2-b}{x^2}$$

La recta tangente en $x=1$ tendrá de ecuación: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$ y como nos dice el enunciado que esta recta es $y=-2$, se tiene que cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-2 \\ f'(1)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{a+b}{1}=-2 \\ \dfrac{a-b}{1}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow a=-1;b=-1$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{-x^2+1}{x^2}$; $y'=0\Rightarrow x=\pm 1$

Como el dominio dice que es $(0,+\infty)$, sólo tomamos el valor $x=1$

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	+	–
Función	C	D

$\downarrow$
Máximo $(1,-2)$

Sea *f* la función definida para $x \neq 2$ por $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
c) Calcula, si existen, el máximo y el mínimo absolutos de *f* en el intervalo [0; 2) (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{2\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x = 2$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$

Asíntotas Horizontales: No tiene ya que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

Asíntota Oblicua: La ecuación es $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} = 1;$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} - 1x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 3 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x + 3}{x - 2} = -2$$

Luego es: $y = x - 2$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{(x - 2)^2}$; $y' = 0 \Rightarrow$ NO

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Signo y'	+	+
Función	C	C

Luego la función es creciente en su dominio.

c) Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los puntos donde la función no es continua, donde no es derivable o en los extremos del intervalo $[0, 2)$.

En nuestro caso la función $f(x)$ es continua y derivable en $x \neq 2$. Luego sólo tenemos que estudiar en el punto $x = 0$. En este punto tiene un mínimo absoluto y vale $f(0) = -\dfrac{3}{2}$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{5x+8}{x^2+x+1}$
a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes coordenados.
b) Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
c) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
d) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Punto de corte eje X $\Rightarrow y=0 \Rightarrow 0=\dfrac{5x+8}{x^2+x+1}; x=-\dfrac{8}{5} \Rightarrow \left(-\dfrac{8}{5},0\right)$

Punto de corte eje Y $\Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\dfrac{8}{1}; y=8 \Rightarrow (0,8)$

b) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}$

Asíntotas Verticales: No tiene.

Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+8}{x^2+x+1} = 0 \Rightarrow y=0$

Asíntota Oblicua: No tiene ya que posee asíntota horizontal.

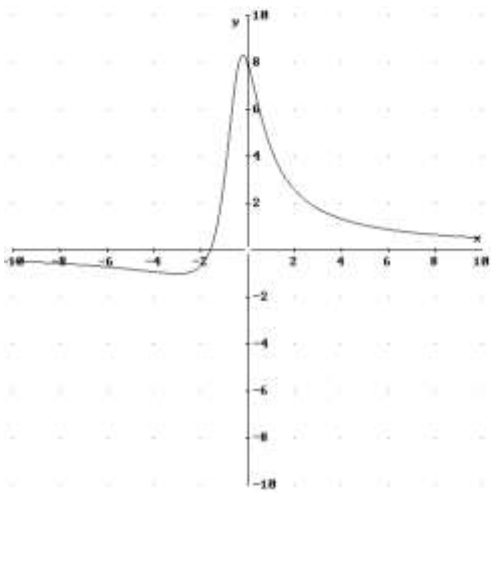
c) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{-5x^2-16x-3}{(x^2+x+1)^2}=0 \Rightarrow x=-3 \;\; y \;\; -\dfrac{1}{5}$

	$(-\infty,-3)$	$\left(-3,-\dfrac{1}{5}\right)$	$\left(-\dfrac{1}{5},\infty\right)$
Signo y'	–	+	–
Función	D	C	D

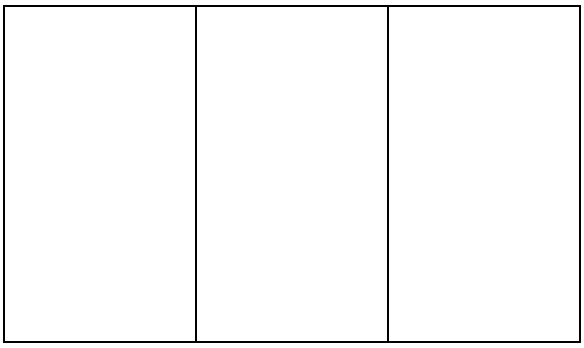
$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

Mínimo $(-3,-1)$ $\quad$ Máximo $\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{25}{3}\right)$

d)



De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12.800 m^2 dividido en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas), determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Llamamos x a la longitud e y al ancho del solar.

Paso 1: Escribimos la función que queremos que sea mínima: $L_{\min} = 2x + 4y$

Paso 2: Escribimos la relación entre las variables: $x \cdot y = 12.800$; $y = \dfrac{12.800}{x}$

Paso 3: Sustituimos: $L_{\min} = 2x + 4y = 2x + 4 \cdot \dfrac{12.800}{x} = 2x + \dfrac{51.200}{x}$

Paso 4: Derivamos e igualamos a cero: $L'_{\min} = 2 - \dfrac{51.200}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 160$

Paso 5: Calculamos la 2ª derivada.

$$L'' = \frac{102.400}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} L''(x = 160) = 0'025 \Rightarrow \textit{mínimo} \\ L''(x = -160) = -0'025 \Rightarrow \textit{Máximo} \end{cases}$$

Luego las dimensiones del solar son x = 160 m ; y = 80 m

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$
a) Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{e^x}$, no tiene asíntota vertical ya que no hay ningún valor de x que anule el denominador.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x-1)}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y = 0$.
Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

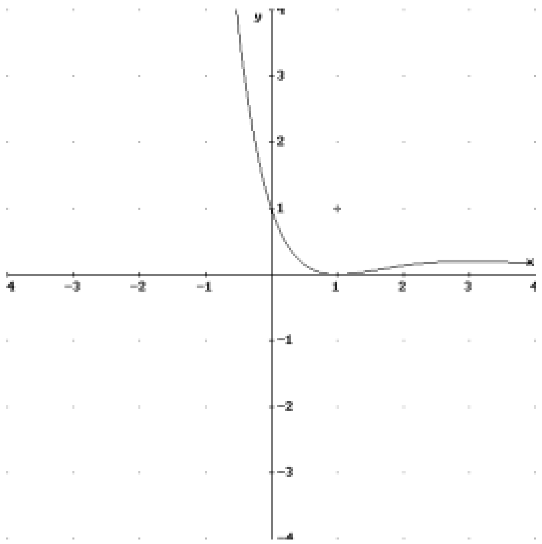
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \dfrac{2(x-1)e^x - (x-1)^2 e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-x^2+4x-3}{e^x}$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 1; x = 3$$

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
Signo y'	$-$	$+$	$-$
Función	D	C	D

$\downarrow$ mínimo $(1,0)$ $\qquad$ $\downarrow$ Máximo $(3, 4e^{-3})$

El punto $(1,0)$, además de ser el mínimo relativo, es el mínimo absoluto. La función no tiene máximo absoluto.



De una función $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ se sabe que $f(3)=6$ y que su función derivada está dada por:

$$f'(x)=\begin{cases} 5x-2 & si \quad 0<x<1 \\ x^2-6x+8 & si \quad 1\le x<5 \end{cases}$$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=3$ es $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)$

$$f(3)=6$$
$$f'(x)=x^2-6x+8 \Rightarrow f'(3)=3^2-6\cdot 3+8=-1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-6=-1\cdot(x-3)\Rightarrow y=-x+9$

b) Igualamos a cero la derivada: $y'=5x-2=0\Rightarrow x=\dfrac{2}{5}$

$$y'=x^2-6x+8=0\Rightarrow x=2; x=4$$

	$(0,\frac{2}{5})$	$(\frac{2}{5},1)$	(1,2)	(2,4)	(4,5)
Signo y'	–	+	+	–	+
Función	D	C	C	D	C

mínimo $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{133}{30}\right)$ Máximo $\left(2,\dfrac{20}{3}\right)$ mínimo $\left(4,\dfrac{16}{3}\right)$

Para poder calcular las coordenadas del máximo y de los mínimos, necesitamos calcular la función *f(x)*

$\int(5x-2)dx=\dfrac{5x^2}{2}-2x+C$; $\int(x^2-6x+8)dx=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+8x+D$

Como $f(3)=6\Rightarrow 6=\dfrac{27}{3}-27+24+D\Rightarrow D=0$

Como *f(x)* es continua en el punto *x* = 1, tenemos: $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\Rightarrow \dfrac{5}{2}-2+C=\dfrac{1}{3}-3+8\Rightarrow C=\dfrac{29}{6}$

Luego: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5x^2}{2}-2x+\dfrac{29}{6} & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{x^3}{3}-3x^2+8x & si \quad 1\le x<5 \end{cases}$