EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2011

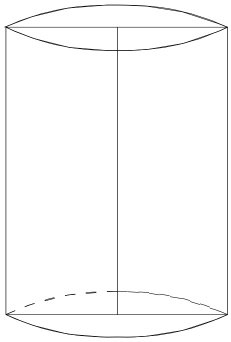
MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo es: $V = \pi r^2 h$

b) Relación entre las variables: $54 = 2\pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow h = \dfrac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \dfrac{27 - \pi r^2}{\pi r}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{27 - \pi r^2}{\pi r} = 27r - \pi r^3$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$V' = 27 - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{27}{3\pi}} = \pm 1'69\, m$$

Solo vale la solución positiva ya que estamos calculando dimensiones, luego:

$$r = 1'69\ m\ ;\ h = 3'39\ m$$

Sea $f:[1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\sqrt{x-1}$. Determina el punto *P* de la gráfica de *f* que se encuentra a menor distancia del punto $A(2,0)$.¿Cuál es esa distancia?.
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Función que queremos que sea mínimo: La distancia entre los puntos $(2,0)$ y $(x,\sqrt{x-1})$.

$$d=\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{x-1}-0)^2}=\sqrt{x^2-3x+3}$$

Derivamos e igualamos a cero

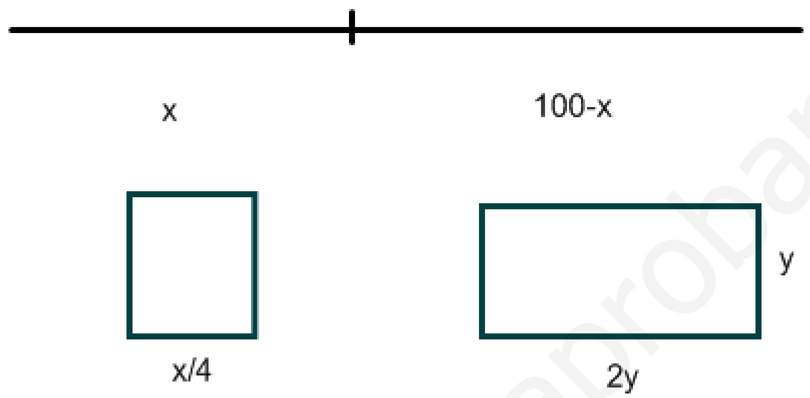
$$d'=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

Luego el punto es: $P=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La distancia mínima es: $d=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ u$

Un alambre de longitud 100 metros se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínima: $S_{\min} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + 2y^2$

b) Relación entre las variables: $100 - x = 2y + 2y + y + y = 6y \Rightarrow y = \frac{100-x}{6}$

c) Expresamos la función que queremos que sea mínima con una sola variable.

$$S_{\min} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + 2y^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{100-x}{6}\right)^2 = \frac{17x^2 - 1600x + 80000}{144}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{34x - 1600}{144} = 0 \Rightarrow x = \frac{800}{17}$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo

$$S'' = \frac{34}{144} > 0 \Rightarrow mínimo$$

Luego, las dimensiones son: $x = \frac{800}{17}\, m$; $100 - x = \frac{900}{17}\, m$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=4-x^2$
a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.
b) Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $x+2y-2=0$.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta normal en el punto de abscisa $x=2$ es:

$$y-f(2)=-\frac{1}{f'(2)}(x-2)$$

Calculamos: $f(2)=4-2^2=0$

$$f'(x)=-2x\Rightarrow f'(2)=-4$$

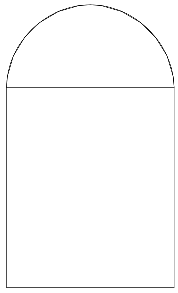
Sustituyendo, tenemos: $y-f(2)=-\dfrac{1}{f'(2)}(x-2)\Rightarrow y-0=-\dfrac{1}{-4}(x-2)\Rightarrow x-4y-2=0$

a) La pendiente de la recta que nos dan es: $x+2y-2=0\Rightarrow y=\dfrac{-x+2}{2}\Rightarrow m=-\dfrac{1}{2}$. La recta perpendicular tendrá de pendiente $m=2$.

$$f'(x)=-2x=2\Rightarrow x=-1\ ;\ f(-1)=4-(-1)^2=3$$

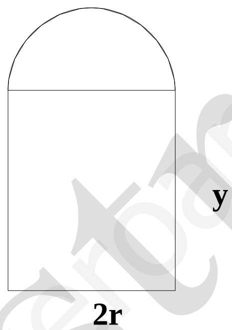
Luego, el punto que nos piden es: $(-1,3)$

Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo.



De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10 m, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = 2ry + \dfrac{\pi r^2}{2}$

b) Relación entre las variables: $10 = 2r + 2y + \pi r \Rightarrow y = \dfrac{10 - 2r - \pi r}{2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = 2ry + \frac{\pi r^2}{2} = 2r\left(\frac{10-2r-\pi r}{2}\right) + \frac{\pi r^2}{2} = \frac{20r - 4r^2 - \pi r^2}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{20 - 8r - 2\pi r}{2} = 0 \Rightarrow r = \frac{20}{8 + 2\pi} = 1'4$$

e) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$S'' = \frac{-8 - 2\pi}{2} < 0 \Rightarrow Máximo$$

Luego, las dimensiones son: $r = 1'4\,m$; $y = 1'4\,m$

Sea $f:\left[\frac{1}{e},4\right]\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x-\ln(x)+a & si\quad \frac{1}{e}\le x\le 2 \\ bx+1-\ln(2) & si\quad 2<x\le 4\end{cases}$

Donde ln denota la función logaritmo neperiano.

a) Calcula los valores de *a* y *b* para que *f* sea derivable en el intervalo $\left(\frac{1}{e},4\right)$.

b) Para $a=0$ y $b=\frac{1}{2}$ halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable, primero tiene que ser continua en el punto $x=2$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} x-\ln(x)+a=2-\ln 2+a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} bx+1-\ln 2=2b+1-\ln 2\end{array}\right\}\Rightarrow 2-\ln 2+a=2b+1-\ln 2\Rightarrow a-2b=-1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 1-\frac{1}{x} & si\quad \frac{1}{e}\le x<2 \\ b & si\quad 2<x<4\end{cases}$

Como es derivable en $x=2$, se cumple que: $\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ f'(2^+)=b\end{array}\right\}\Rightarrow b=\frac{1}{2}$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que: $a-2\cdot\frac{1}{2}=-1\Rightarrow a=0$

b) La función que tenemos es: $f(x)=\begin{cases} x-\ln(x) & si\quad \frac{1}{e}\le x\le 2 \\ \frac{1}{2}x+1-\ln(2) & si\quad 2<x\le 4\end{cases}$

Sabemos que los extremos absolutos pueden estar en:

- Los extremos del intervalo, en este caso $x=\frac{1}{e}$ y $x=4$
- En los puntos donde se anula la derivada, en este caso, $1-\frac{1}{x}=0\Rightarrow x=1$

Para $x=\frac{1}{e}$, la función vale: $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}+1=1'36$

Para $x=4$, la función vale: $f(4)=\frac{1}{2}\cdot 4+1-\ln 2=3-\ln 2=2'30$

Para $x=1$, la función vale: $f(1)=1-\ln 1=1$

Luego, el máximo absoluto está en $x=4$ y vale $f(4)=2'30$. El mínimo absoluto está en $x=1$ y vale $f(1)=1$

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, determina *a*, *b* y *c* sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1,0), y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y=-3x+3$.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada primera y segunda de la función:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \ ; \ f''(x)=6ax+2b$$

- El punto (1,0) es un punto de inflexión de la gráfica de *f*

$$\Rightarrow \begin{cases} Pasa\ por\ (1,0)\Rightarrow a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1=0 \\ f''(1)=0\Rightarrow 6a\cdot 1+2b=0 \end{cases}$$

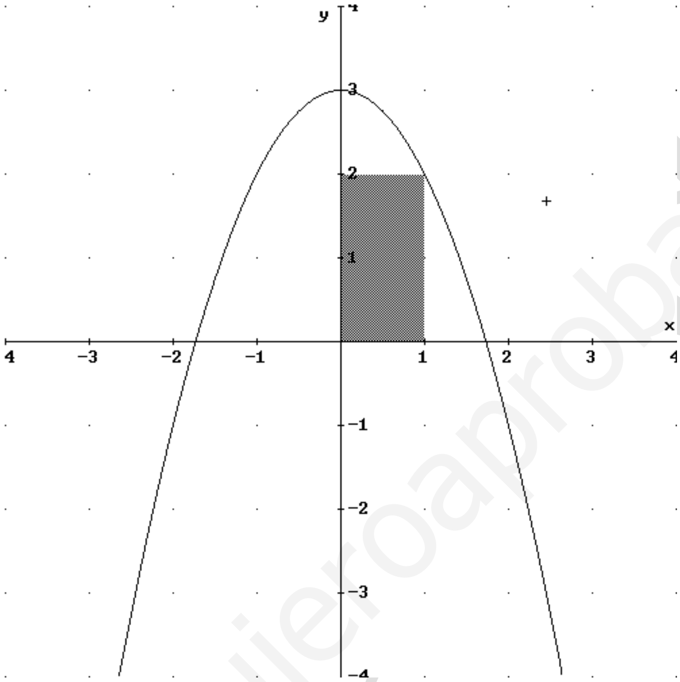
- La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$ tiene de pendiente -3

$$\Rightarrow f'(1)=-3\Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=-3$$

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{r} a+b+c= \ \ 0 \\ 6a+2b= \ \ 0 \\ 3a+2b+c=-3 \end{array}\right\}$ resulta: $a=3$; $b=-9$; $c=6\Rightarrow f(x)=3x^3-9x^2+6x$

En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y=-x^2+3$. Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max}=x\cdot y$

b) Relación entre las variables: $y=-x^2+3$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max}=x\cdot(-x^2+3)=-x^3+3x$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'=-3x^2+3=0\Rightarrow x=\pm1$$

e) Comprobamos que valor corresponde a un máximo

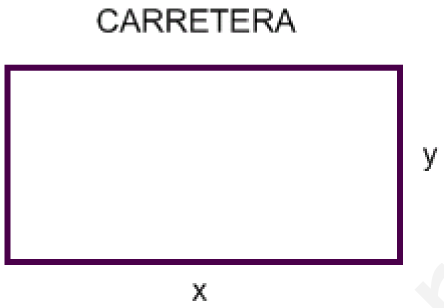
$$S''=-6x$$
$$S''(1)=-6\cdot1=-6<0\Rightarrow Máximo$$
$$S''(-1)=-6\cdot(-1)=6>0\Rightarrow Mínimo$$

Además, el valor $x=-1$ no sirve porque no está en el primer cuadrante.

Luego, las dimensiones son: $x=1$; $y=2$

Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $3.000 = 100x + 10x + 10y + 10y \Rightarrow y = \dfrac{3.000 - 110x}{20} = \dfrac{300 - 11x}{2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = x \cdot y = x \cdot \frac{300 - 11x}{2} = \frac{300x - 11x^2}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\max} = \frac{300 - 22x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{150}{11}\ m \ ; \ y = 75\ m$$

e) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$S'' = \frac{-22}{2} < 0 \Rightarrow Máximo$$

Luego, las dimensiones son: $x = \dfrac{150}{11}\ m \ ; \ y = 75\ m$

En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, *x*, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2+70x$, mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están determinados por la expresión $\dfrac{400x}{x-30}$.
Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a que edad se alcanza.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Nos están dando una función que viene definida a trozos: $f(x)=\begin{cases} -x^2+70x & si \quad 18\le x<50 \\ \dfrac{400x}{x-30} & si \quad x\ge 50 \end{cases}$

Sabemos que los extremos absolutos pueden estar en:

- Los extremos del intervalo, en este caso $x=18$

- En los puntos donde se anula la derivada, en este caso, $-2x+70=0\Rightarrow x=35$

- En los puntos donde no es continua o derivable, en nuestro caso, $x=50$ que donde cambia de una función a la otra

Para $x=18$, la función vale: $f(18)=-18^2+70\cdot 18=936$
Para $x=35$, la función vale: $f(35)=-35^2+70\cdot 35=1225$
Para $x=50$, vamos a ver si la función es continua

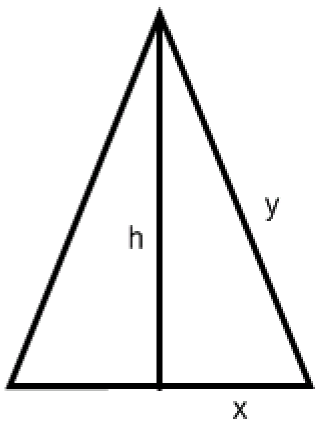
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 50^-}(-x^2+70x)=1000 \\ \lim\limits_{x\to 50^+}\left(\dfrac{400x}{x-30}\right)=1000 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 50^-} f(x)=\lim_{x\to 50^+} f(x)=1000$$

Luego, la función es continua y vale 1000.

Por lo tanto el máximo de ingresos es 1225 € y se alcanza a la edad de 35 años.

Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.
MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



1) Escribimos la función que queremos que sea máximo: $S_{max} = \dfrac{2x\cdot h}{2} = x\cdot h$

2) Relación entre las variables:

$$\left.\begin{array}{c} 2x+2y=8\ ;\ x+y=4 \\ h^2+x^2=y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow h=\sqrt{y^2-x^2}=\sqrt{(4-x)^2-x^2}=\sqrt{16-8x}$$

3) Escribimos la función que queremos que sea máximo con una sola variable:

$$S_{max} = x\cdot h = x\cdot\sqrt{16-8x} = \sqrt{16x^2-8x^3}$$

4) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero:

$$S' = \frac{32x-24x^2}{2\sqrt{16x^2-8x^3}} = \frac{16x-12x^2}{\sqrt{16x^2-8x^3}} = 0 \Rightarrow x=0\ ;\ x=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

Luego, la base del triángulo es $2x = 2\cdot\dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$ y la altura $h=\sqrt{16-8\cdot\dfrac{4}{3}}=\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

5) Comprobamos que $x=\dfrac{4}{3}$ corresponde a un máximo, sustituyendo este valor en la segunda derivada y sale $S''\left(\dfrac{4}{3}\right)<0$, luego, es un máximo.

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$ para $x\neq 0$.
a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.
b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función *f(x)* es $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntotas Verticales: $x=0$.

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+1}{x^3}=\infty \Rightarrow$ No tiene.

Asíntota Oblicua: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+1}{x^4}=3$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^4+1}{x^3}-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

Luego, la asíntota oblicua es: $y=3x$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{12x^3\cdot x^3-3x^2(3x^4+1)}{(x^3)^2}=\frac{3x^4-3}{x^4}=0\Rightarrow x=1 \;\; y \;\; x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	+	–	–	+
Función	C	D	D	C

↓ ↓

Máximo $(-1,-4)$ mínimo $(1,4)$