

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera los planos de ecuaciones: $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$

a) Determina la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.

b) Determina los puntos que equidistan de $A(1,2,3)$ y $B(2,1,0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La recta debe ser paralela a la recta intersección de los dos planos. Calculamos, por tanto, el vector director de dicha recta.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + \vec{k} + \vec{j} - \vec{i} = (0, 2, 2)$$

Luego, la ecuación de la recta pedida en forma paramétrica será:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

b) Las coordenadas de cualquier punto de la recta intersección de los dos planos, será:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{array} \Rightarrow C(1, 1+t, t)$$

Los módulos de los vectores $\vec{AC} = (0, t-1, t-3)$ y $\vec{BC} = (-1, t, t)$, tienen que ser iguales, luego:

$$\sqrt{0^2 + (t-1)^2 + (t-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + t^2 + t^2} \Rightarrow t^2 + 1 - 2t + t^2 + 9 - 6t = 1 + t^2 + t^2 \Rightarrow t = \frac{9}{8}$$

Luego, el punto pedido es: $C\left(1, \frac{17}{8}, \frac{9}{8}\right)$

Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,5)$.

a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices $A(0,3,-1)$, $B(0,1,5)$ y $C(x,4,3)$ tiene un ángulo recto en C .

b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$ y es paralelo a la recta

definida por las ecuaciones $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Como el ángulo recto está en C , los vectores \vec{CA} y \vec{CB} , son perpendiculares, luego su producto escalar vale cero.

$$\vec{CA} = (-x, -1, -4)$$

$$\vec{CB} = (-x, -3, 2)$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Rightarrow (-x, -1, -4) \cdot (-x, -3, 2) = 0 \Rightarrow x^2 + 3 - 8 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

b) Calculamos el vector director de la recta.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{j} + \vec{k} + 2\vec{k} - \vec{i} = (-1, 2, 3)$$

Calculamos el vector que une los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$.

$$\vec{u} = (3, 4, 3) - (0, 1, 5) = (3, 3, -2)$$

El plano que nos piden viene definido por el punto $(0,1,5)$ y los vectores $\vec{u} = (3, 3, -2)$ y $\vec{v} = (-1, 2, 3)$

$$\begin{vmatrix} x-0 & 3 & -1 \\ y-1 & 3 & 2 \\ z-5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 9x + 6z - 30 + 2y - 2 + 3z - 15 - 9y + 9 + 4x = 13x - 7y + 9z - 38 = 0$$

Sea r la recta definida por $\frac{x-2}{3} = \frac{y-k}{4} = \frac{z}{5}$ y s la recta definida por $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$

a) Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

b) Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-k}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow A = (2, k, 0); \vec{u} = (3, 4, 5)$$
$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow B = (-2, 1, 3); \vec{v} = (-1, 2, 3)$$

Las rectas se cortan si el determinante de $\vec{AB} = (-4, 1-k, 3); \vec{u}$ y \vec{v} vale cero, luego:

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 1-k & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 14k + 8 = 0 \Rightarrow k = -\frac{4}{7}$$

b) El plano viene definido por el punto B y los vectores \vec{u} y \vec{v} , luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 3 & -1 \\ y-1 & 4 & 2 \\ z-3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 7y + 5z - 6 = 0$$

Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $x + 2y + 3z - 1 = 0$ que corta perpendicularmente a la recta definida por $\begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ en el punto $(2, 1, -1)$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La ecuación de todos los planos perpendiculares a la recta que nos dan es: $2x + 2y + z + D = 0$.

El que pasa por el punto $(2, 1, -1)$, es: $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow 2x + 2y + z - 5 = 0$.

La recta que nos piden viene dada por la intersección del plano que nos dan y del plano que hemos calculado, luego su ecuación será:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Considera la recta r definida por $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación $2x - y + \beta z = 0$.

Determina α y β en cada uno de los siguientes casos:

a) La recta r es perpendicular al plano π .

b) La recta r está contenida en el plano π .

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta y el vector normal del plano son paralelos, luego, sus componentes son proporcionales.

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{-1} = \frac{2}{\beta} \Rightarrow \alpha = -8 ; \beta = -\frac{1}{2}$$

b) Para que la recta r esté contenida en el plano π , el punto de la recta debe pertenecer al plano y el vector director de la recta y el vector normal del plano deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe valer 0.

Sustituimos el punto en la ecuación del plano.

$$2 \cdot 1 - 0 + \beta \cdot 1 = 0 \Rightarrow \beta = -2$$

El producto escalar de los vectores $(\alpha, 4, 2)$ y $(2, -1, -2)$ debe valer cero, luego:

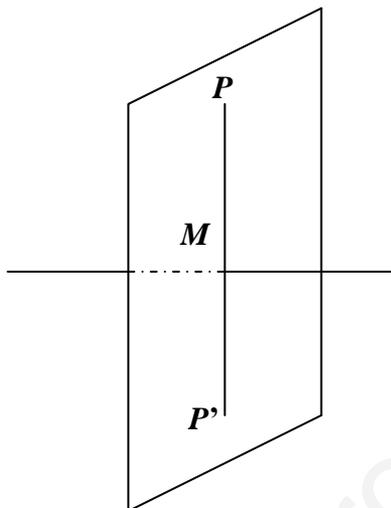
$$\alpha \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow \alpha = 4$$

Calcula la distancia del punto $P(1, -3, 7)$ a su punto simétrico respecto de la recta definida por

$$\left. \begin{aligned} 3x - y - z - 2 &= 0 \\ x + y - z + 6 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto P es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano} = \text{vector director de la recta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 2, 4)$$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $2x + 2y + 4z + D = 0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $P(1, -3, 7)$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 7 + D = 0 \Rightarrow D = -24 \Rightarrow 2x + 2y + 4z - 24 = 0 \Rightarrow x + y + 2z - 12 = 0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello pasamos la recta a paramétricas y sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$\left. \begin{aligned} 3x - y - z - 2 &= 0 \\ x + y - z + 6 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = -4 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

$$2t - 4 + 2t + 4 + 8t - 12 = 0 \Rightarrow t = 1$$

luego las coordenadas del punto M son: $M(2, -2, 6)$

$$\vec{PM} = (1, 1, -1) \Rightarrow d(P, M) = \left| \vec{PM} \right| = \sqrt{3} \Rightarrow d(P, P') = 2 \left| \vec{PM} \right| = 2\sqrt{3} \text{ u}$$

Encuentra la ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos π_1 de ecuación $x + y + z = 3\sqrt{3}$ y π_2 de ecuación $-x + y + z = 2$.

b) Halla la distancia de la recta r al plano π_1 .

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales de dichos planos, luego:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2)$$

por lo tanto, la ecuación de la recta pedida es: $\frac{x}{0} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$

b) El vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano π_1 , por lo tanto, la recta y el plano son paralelos con lo cual la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquier punto de la recta (el origen) al plano, es decir:

$$d(O, \pi_1) = \frac{0+0+0+3\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 3u$$

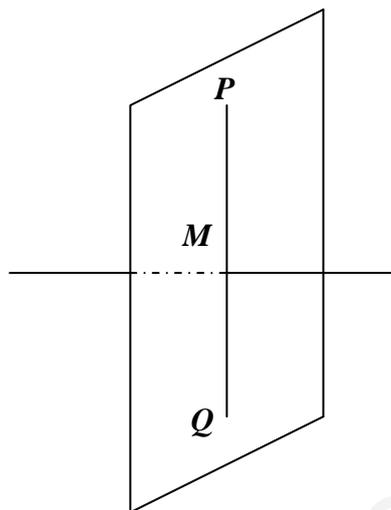
Considera el punto $P(1, 0, -2)$ y la recta r definida por $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + y - 4z = 7 \end{cases}$

a) Determina la recta perpendicular a r que pasa por P .

b) Halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r .

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto P es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano} = \text{vector director de la recta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (4, 8, 4)$$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $4x + 8y + 4z + D = 0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $P(1, 0, -2)$

$$4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) + D = 0 \Rightarrow D = 4 \Rightarrow 4x + 8y + 4z + 4 = 0 \Rightarrow x + 2y + z + 1 = 0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello pasamos la recta a paramétricas y sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + y - 4z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$3 + t + 2 \cdot (1 + 2t) + t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$$

luego las coordenadas del punto M son: $M(2, -1, -1)$

La ecuación de la recta pedida es: $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{-1-0} = \frac{z+2}{-1+2} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+2}{1}$

$$\text{b) } \vec{PM} = (1, -1, 1) \Rightarrow d(P, M) = |\vec{PM}| = \sqrt{3} \Rightarrow d(P, Q) = 2 |\vec{PM}| = 2\sqrt{3} \text{ u}$$

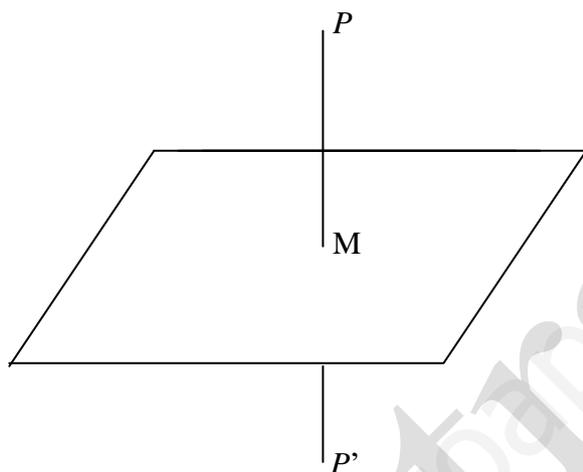
Considera el plano π de ecuación $2x + 2y - z - 6 = 0$ y el punto $P(1, 0, -1)$.

a) Calcula la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π .

b) Encuentra el punto simétrico de P respecto del plano π

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto P es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano} = \text{vector director de la recta} = (2, 2, -1)$$

La ecuación paramétrica de la recta será:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

b) Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$2 \cdot (1 + 2t) + 2 \cdot 2t - 1 \cdot (-1 - t) - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

luego las coordenadas del punto M son: $x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; $y = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $z = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$

Como el punto M es el punto medio del segmento PP' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto P' , se debe verificar que:

$$\frac{1+a}{2} = \frac{5}{3}; a = \frac{7}{3}; \frac{0+b}{2} = \frac{2}{3}; b = \frac{4}{3}; \frac{-1+c}{2} = -\frac{4}{3}; c = -\frac{5}{3}$$

Considera el plano π de ecuación $2x + 2y - z - 6 = 0$ y la recta r definida por $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.

b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π .

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la ecuación del plano a segmentaria

$$2x + 2y - z - 6 = 0 \Rightarrow \frac{2x}{6} + \frac{2y}{6} + \frac{z}{-6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-6} = 1$$

Luego, los puntos de corte del plano con los ejes coordenados son:

$$A(3,0,0); B(0,3,0) \text{ y } C(0,0,-6)$$

Calculamos los vectores $\vec{AB} = (-3,3,0)$ y $\vec{AC} = (-3,0,-6)$ y calculamos su producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-18, -18, 9)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{18^2 + 18^2 + 9^2} = \frac{27}{2} u^2$$

b) La recta y el plano son paralelos ya que el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares. Luego, calculamos la distancia de un punto de la recta $(1, -1, 0)$ al plano.

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 2 u$$

a) Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$ en tres partes iguales

b) Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento \overline{AB} que pasa por su punto medio.

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\overline{AB} = 3\overline{AM}$, y como $\overline{AB} = (-2, -2, 2)$ y $\overline{AM} = (x-1, y-2, z-1)$, obtenemos: $(-2, -2, 2) = (3x-3, 3y-6, 3z-3) \Rightarrow x = \frac{1}{3}; y = \frac{4}{3}; z = \frac{5}{3}$, es

decir el punto M es $M = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB , es decir:

$$N = \frac{M+B}{2} = \left(\frac{\frac{1}{3}-1 + \frac{4}{3}+0}{2}, \frac{\frac{5}{3}+3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

b) El vector normal del plano es el vector $\overline{AB} = (-2, -2, 2)$ y pasa por el punto $\frac{A+B}{2} = (0, 1, 2)$, luego, su ecuación será:

$$-2x - 2y + 2z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2$$

$$-2x - 2y + 2z - 2 = 0 \Rightarrow -x - y + z - 1 = 0$$

Considera los vectores $\vec{u} = (1, 1, m)$, $\vec{v} = (0, m, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2m, 0)$.

a) Determina el valor de m para que los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} sean linealmente dependientes.

b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, expresa el vector \vec{w} como combinación lineal de los vectores \vec{u} y \vec{v} .

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que los vectores sean linealmente dependientes su determinante tiene que ser 0, es decir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = -1 - m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m = 1$$

b)

$$\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} \Rightarrow (1, 2, 0) = a \cdot (1, 1, 1) + b \cdot (0, 1, -1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 2 = a + b \Rightarrow a = 1 ; b = 1 \\ 0 = a - b \end{cases}$$

Luego, la combinación lineal es: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$