

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Dada la recta r definida por: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$

- a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r .
b) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r .
MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a implícitas: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Calculamos la ecuación del haz de planos:

$$3x - 2y - 5 + k(x - 2z + 3) = 0 \Rightarrow (3+k)x - 2y - 2kz - 5 + 3k = 0$$

Como queremos que pase por el origen, tenemos:

$$(3+k) \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 2k \cdot 0 - 5 + 3k = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{3}$$

Luego, el plano que nos piden es:

$$3x - 2y - 5 + \frac{5}{3}(x - 2z + 3) = 0 \Rightarrow 7x - 3y - 5z = 0$$

b) El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego, su ecuación será:

$$2x + 3y + z + D = 0$$

Como queremos que pase por el origen:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

Luego, el plano que nos piden es: $2x + 3y + z = 0$

Dados los puntos $A(2,1,1)$ y $B(0,0,1)$, halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

El punto C como está en el eje OX , tendrá de coordenadas $C(a,0,0)$. Calculamos los vectores $\vec{AB} = (-2, -1, 0)$ y $\vec{AC} = (a-2, -1, -1)$ y calculamos su producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1, -2, a)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \sqrt{1+4+a^2} \Rightarrow a = \pm \sqrt{11}$$

Luego, el punto C puede ser $C(\sqrt{11}, 0, 0)$ ó $C(-\sqrt{11}, 0, 0)$

Los puntos $A = (-2, 3, 1)$, $B = (2, -1, 3)$ y $C = (0, 1, -2)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

a) Halla las coordenadas del vértice D .

b) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC .

c) Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Si $ABCD$ son los vértices de un paralelogramo. Los vectores libres $\vec{AB}$ y $\vec{DC}$ son iguales:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (4, -4, 2) \\ \vec{DC} = (-x, 1-y, -2-z) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow D = (-4, 5, -4)$$

b) La recta pasa por el punto $B = (2, -1, 3)$ y como vector director el $\vec{AC} = (2, -2, -3)$. Su ecuación continua es

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-3}$$

c) El plano viene definido por el punto $B = (2, -1, 3)$ y los vectores $\vec{BA} = (-4, 4, -2)$ y

$\vec{BC} = (-2, 2, -5)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -4 & -2 \\ y+1 & 4 & 2 \\ z-3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

Sea la recta r dada por $\begin{cases} 2x + y - mz = 2 \\ x - y - z = -m \end{cases}$ y el plano π definido por $x + my - z = 1$

- a) ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos?
 b) ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano?
 c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando $m = 0$?
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-m, 2-m, -3)$$

Si la recta es paralela al plano el producto escalar del vector director de la recta $\vec{u} = (-1-m, 2-m, -3)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (1, m, -1)$ debe valer cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow -1-m+2m-m^2+3=0 \Rightarrow -m^2+m+2=0 \Rightarrow m=-1; m=2$$

b) Formamos el sistema con las tres ecuaciones. Para que la recta esté contenida en el plano el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada debe valer 2.

$$\begin{cases} 2x + y - mz = 2 \\ x - y - z = -m \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 + m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1; m = 2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $m = -1 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 2 \Rightarrow$ Recta contenida en el plano

Si $m = 2 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 3 \Rightarrow$ La recta no está contenida en el plano

c) Si $m = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 \Rightarrow$ La recta es secante con el plano.

Considera la recta r definida por $\begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s .

b) Halla la ecuación general de un plano que contiene a s y es paralelo a r .

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Formamos el sistema con las cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \\ 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 4$$

Luego, las rectas se cruzan.

b) Pasamos las rectas a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = 3 - 3y \end{cases} \Rightarrow A = (0, 0, 3); \vec{u} = (0, 1, -3)$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -3 + 2x \end{cases} \Rightarrow B = (0, 0, -3); \vec{v} = (1, 0, 2)$$

El plano que nos piden viene definido por $B = (0, 0, -3); \vec{v} = (1, 0, 2); \vec{u} = (0, 1, -3)$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z + 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2x + 3y + z + 3 = 0$$

Sea la recta r definida por $\begin{cases} x=1 \\ x-y=0 \end{cases}$ y sean los planos π_1 de ecuación $x+y+z=0$, y π_2 , de ecuación $y+z=0$. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano π_1 , que es paralela al plano π_2 y que corta a la recta r .

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como la recta pedida está contenida en el plano π_1 y es paralela al plano π_2 , su vector director tiene que ser perpendicular a los vectores normales de dichos planos, luego:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$$

Cualquier punto de la recta r tiene de coordenadas $(1, 1, a)$, por lo tanto, la recta pedida tendrá de

ecuación: $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=a+t \end{cases}$ y como está contenida en el plano π_1 debe verificar su ecuación. Luego:

$$x+y+z=0 \Rightarrow 1+1-t+a+t=0 \Rightarrow a=-2$$

La recta que nos piden tiene de ecuación: $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=-2+t \end{cases}$

Se sabe que los planos de ecuaciones: $x + 2y + bz = 1$; $2x + y + bz = 0$; $3x + 3y - 2z = 1$ se cortan en una recta r .

a) Calcula el valor de b .

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de r .

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que los tres planos se corten en una recta, el sistema formado por las tres ecuaciones debe tener infinitas soluciones, es decir, $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(M) = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6b + 6 = 0 \Rightarrow b = -1$$

b) Para calcular las ecuaciones de la recta tomamos las dos últimas ecuaciones de sistema.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = z \\ 3x + 3y = 1 + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{z}{3} \\ y = \frac{2}{3} + \frac{z}{3} \\ z = z \end{cases}$$

Dados los puntos $A=(2,1,-1)$ y $B=(-2,3,1)$ y la recta r definida por $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$ halla las coordenadas de un punto de la recta r que equidiste de los puntos A y B .
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas. $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5+2t}{3} \\ y = \frac{-2-t}{3} \\ z = t \end{cases}$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $C = \left(\frac{-5+2t}{3}, \frac{-2-t}{3}, t \right)$. Para que equidiste de A y B , el módulo de los vectores $\vec{AC} = \left(\frac{-11+2t}{3}, \frac{-5-t}{3}, t+1 \right)$ y $\vec{BC} = \left(\frac{1+2t}{3}, \frac{-11-t}{3}, t-1 \right)$ deben ser iguales, luego:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{-11+2t}{3}\right)^2 + \left(\frac{-5-t}{3}\right)^2 + (t+1)^2} &= \sqrt{\left(\frac{1+2t}{3}\right)^2 + \left(\frac{-11-t}{3}\right)^2 + (t-1)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{121+4t^2-44t}{9} + \frac{25+t^2+10t}{9} + t^2+1+2t &= \frac{1+4t^2+4t}{9} + \frac{121+t^2+44t}{9} + t^2+1-2t \Rightarrow \\ \Rightarrow -24t &= -24 \Rightarrow t=1 \end{aligned}$$

Luego, el punto que nos piden es: $C = \left(\frac{-5+2t}{3}, \frac{-2-t}{3}, t \right) = \left(\frac{-5+2 \cdot 1}{3}, \frac{-2-1}{3}, 1 \right) = (-1, -1, 1)$

Otra forma: Calculamos la ecuación del plano mediador, es decir, el plano perpendicular a la recta que pasa por A y B por el punto medio del segmento AB .

El vector normal del plano es el vector $\vec{AB} = (-4, 2, 2)$, luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares a la recta que pasa por A y B es: $-4x + 2y + 2z + D = 0$ como queremos el que pasa por el punto medio del segmento AB , $(0, 2, 0)$, tenemos que:

$$-4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow -4x + 2y + 2z - 4 = 0$$

El punto que nos piden, es el punto de corte de la recta r con el plano mediador, luego, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la recta r y el plano, tenemos que:

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 3x - 2z = -5 \\ -4x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (-1, -1, 1)$$

Se considera la recta r definida por $mx = y = z + 2$ ($m \neq 0$), y la recta s definida por

$$\frac{x-4}{4} = y-1 = \frac{z}{2}$$

a) Halla el valor de m para el que r y s son perpendiculares.

b) Deduce razonadamente si existe algún valor de m para el que r y s son paralelas.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores directores de las rectas: $\vec{u} = \left(\frac{1}{m}, 1, 1\right)$ y $\vec{v} = (4, 1, 2)$. Si las rectas son perpendiculares el producto escalar de los dos vectores debe valer 0, luego:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{m}, 1, 1\right) \cdot (4, 1, 2) = 0 \Rightarrow \frac{4}{m} + 1 + 2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

b) Si las rectas son paralelas, sus vectores directores deben tener las componentes proporcionales, luego:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Imposible}$$

Considera los puntos $A = (2, 0, 1)$, $B = (-1, 1, 2)$, $C = (2, 2, 1)$ y $D = (3, 1, 0)$.

a) Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos B, C y D .

b) Halla el punto simétrico de A respecto del plano π .

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano π , viene definido por el punto $B = (-1, 1, 2)$ y los vectores $\vec{BC} = (3, 1, -1)$ y $\vec{BD} = (4, 0, -2)$. Luego, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 2z - 2 = 0$$

b) Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto A es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1, -1, 2)$

La ecuación paramétrica de la recta será:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$2 + t + t + 2 + 4t - 2 = 0 \Rightarrow 6t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

luego las coordenadas del punto M son: $\left(2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Como el punto M es el punto medio del segmento AA' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto A' , se debe verificar que:

$$\frac{2+a}{2} = \frac{5}{3}; a = \frac{4}{3}; \frac{0+b}{2} = \frac{1}{3}; b = \frac{2}{3}; \frac{1+c}{2} = \frac{1}{3}; c = -\frac{1}{3} \Rightarrow A' = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Sea la recta s dada por $\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y que contiene a la recta r , dada por $x - 1 = -y + 2 = z - 3$

b) Estudia la posición relativa de la recta s y el plano π_2 , de ecuación $x + y = 3$, y deduce la distancia entre ambos.

MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta s a paramétricas

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + z \\ y = \frac{3 - z}{2} \\ z = z \end{cases} \Rightarrow A = (-1, \frac{3}{2}, 0); \vec{u} = (1, -\frac{1}{2}, 1)$$

Pasamos la recta r a continua

$$x - 1 = -y + 2 = z - 3 \Rightarrow \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 3}{1} \Rightarrow B = (1, 2, 3); \vec{v} = (1, -1, 1)$$

El plano que nos piden viene definido por: $B = (1, 2, 3); \vec{v} = (1, -1, 1); \vec{u} = (1, -\frac{1}{2}, 1)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 1 & 1 \\ y - 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ z - 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - z + 2 = 0$$

b) Formamos el sistema con las tres ecuaciones.

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } M = 3 \Rightarrow \text{La recta y el plano son secantes, luego, la distancia es cero.}$$

Dados los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 1, 2)$ y $C = (1, -1, 1)$.

a) Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.

b) Halla la ecuación del plano que contiene el punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C .

MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que los puntos A , B y C no estén alineados los vectores $\vec{AB} = (0, 0, 2)$ y $\vec{AC} = (0, -2, 1)$ no deben ser proporcionales. Vemos que efectivamente no son proporcionales, luego, los tres puntos no están alineados.

Calculamos el producto vectorial de los vectores $\vec{AB} = (0, 0, 2)$ y $\vec{AC} = (0, -2, 1)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 0, 0)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{16} = 2 \text{ u}^2$$

b) El vector normal del plano que nos piden es $\vec{BC} = (0, -2, -1)$ y pasa por el punto A , luego:

$$-2y - z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow -2y - z + 2 = 0$$