

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

www.emestrada.org

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m existe A^{-1} ?.

b) Siendo $m = 2$, calcula A^{-1} y resuelve el sistema $A \cdot X = B$.

c) Resuelve el sistema $A \cdot X = B$ para $m = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1 ; m = 3$$

Luego, la matriz tiene inversa para todos los valores de $m \neq 1$ y 3

b) Calculamos la matriz inversa para $m = 2$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema es: $x = 0$; $y = 1$; $z = -1$

c) Resolvemos el sistema $\left. \begin{matrix} x - z = 1 \\ y + 3z = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -1 - 3z \\ z = z \end{cases}$

Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, *A*, *B* y *C*. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 €, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 € y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala *A* hubieran asistido a la sala *B* y los de la sala *B* a la sala *A*, se hubiese obtenido una recaudación de 20 € más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Llamamos x = espectadores de la sala *A*.
 y = espectadores de la sala *B*.
 z = espectadores de la sala *C*.

Leyendo el enunciado del problema podemos plantear un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 720 \\ x + y + z = 200 \\ 4x + 3y + 5z = 740 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 100 ; y = 80 ; z = 20$$

Determina razonadamente los valores de m para los que el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + z &= mx \\ x + 2y + z &= my \\ x + 2y + 4z &= mz \end{aligned} \right\}$$

tiene más de una solución.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Lo primero que hacemos es ordenar el sistema.

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + z &= mx \\ x + 2y + z &= my \\ x + 2y + 4z &= mz \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (2-m)x + y + z &= 0 \\ x + (2-m)y + z &= 0 \\ x + 2y + (4-m)z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix} = -m^3 + 8m^2 - 16m + 9 = 0 \Rightarrow m = 1 ; m = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Luego, el sistema homogéneo tiene más de una solución si $m = 1$ ó $m = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} x + my - z = -2 + 2my \\ \text{Considera el sistema de ecuaciones: } mx - y + 4z = 5 + 2z \\ 6x - 10y - z = -1 \end{array} \right\}$$

a) Discute las soluciones del sistema según los valores de m .

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es ordenar el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + my - z = -2 + 2my \\ mx - y + 4z = 5 + 2z \\ 6x - 10y - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - my - z = -2 \\ mx - y + 2z = 5 \\ 6x - 10y - z = -1 \end{array} \right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = -m^2 + 2m - 15 = 0 \Rightarrow m = 3 ; m = -5$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$m = -5$	2	3	S. Incompatible
$m = 3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$b \neq 3$ y -5	3	3	S. Compatible Determinado

b) Resolvemos el sistema para $m = 3$

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 3y = -2 + z \\ 3x - y = 5 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{17 - 7z}{8} \\ y = \frac{11 - 5z}{8} \\ z = z \end{array} \right.$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

b) Resuelve el sistema $A \cdot X = 3X$ e interpreta geoméricamente el conjunto de todas sus soluciones.
MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A + \lambda I$.

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -2 + \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1 + \lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2 + \lambda \end{pmatrix}$$

Su determinante vale:

$$|A + \lambda I| = \begin{vmatrix} -2 + \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1 + \lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3$$

Luego, la matriz no tiene inversa para $\lambda = \pm 3$

b) Resolvemos el sistema
$$\begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo cuya solución es: $x = z$; $y = -2z$; $z = z$ y solución trivial