PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2007

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

emestrada
www.emestrada.es

a) Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

b) Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} **hallada en el apartado anterior,** $\left.\begin{array}{r}x+y=\ 1\\ y+z=-2\\ x+z=\ 3\end{array}\right\}$

MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular la matriz inversa de *A*.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

b) El sistema escrito en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, tenemos:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema es: $x=3$; $y=-2$; $z=0$

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+y+z= \quad 0 \\ 2x+\lambda y+z= \quad 2 \\ x+y+\lambda z=\lambda-1 \end{array}\right\}$

a) Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible.
b) Resuelve el sistema para $\lambda=1$.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=1 \ ; \ \lambda=2$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda=2$	2	3	S. Incompatible
$\lambda=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda\neq 1 \ y \ 2$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Vamos a resolverlo para $\lambda=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-z-2 \\ z=z \end{cases}$

emestrada
www.emestrada.es

Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de *a*,

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z= \ 0 \\ (a+1)y+2z= \ y \\ x-2y+(2-a)z=2z \end{array}\right\}$$

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Lo primero que hacemos es ordenar el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z= \ 0 \\ (a+1)y+2z= \ y \\ x-2y+(2-a)z=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ ay+2z=0 \\ x-2y-az=0 \end{array}\right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = -a^2-a+6=0 \Rightarrow a=2 \ ; \ a=-3$$

A continuación, calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y hacemos la discusión:

	R(A)	
$a=2$	2	S. Compatible Indeterminado
$a=-3$	2	S. Compatible Indeterminado
$a \neq 2 \ y \ -3$	3	S. Compatible Determinado

Vamos a resolverlo:

Caso 1: $a=2 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-z \\ z=z \end{array}\right.$.

Caso 2: $a=-3 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ -3y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{5z}{3} \\ y=\dfrac{2z}{3} \\ z=z \end{array}\right.$

Caso 3: $a \neq 2 \ \ y \ \ -3 \Rightarrow$ Solución trivial $x=y=z=0$

Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} -\lambda x + y + (\lambda+1)z = \lambda+2 \\ x + y + z = 0 \\ (1-\lambda)x - \lambda y = 0 \end{array}\right\}$ **tiene más de una solución.**

a) Calcula, en dicho caso, el valor de la constante λ.

b) Halla todas las soluciones del sistema.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que el sistema tenga más de una solución, el determinante de la matriz de los coeficientes tiene que valer cero, luego:

$$|A| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ ; \ \lambda = -2$$

A continuación, calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	3	S. Incompatible
$\lambda = -2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda \neq 0 \ y \ -2$	3	3	S. Compatible determinado

b) Vamos a resolverlo:

$$\lambda = -2 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \\ z = z \end{cases}$$

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para los valores de *m* que lo hacen compatible:

$$\left.\begin{array}{r} x+my=m \\ mx+y=m \\ mx+my=1 \end{array}\right\}$$

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el determinante de la matriz ampliada

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix} = 2m^3 - 3m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \ ; \ m = -\frac{1}{2}$$

A continuación, calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$m=1$	1	1	S. Compatible indeterminado
$m=-\frac{1}{2}$	2	2	S. Compatible determinado
$m \neq 1 \ y \ -\frac{1}{2}$	2	3	S. Incompatible

Vamos a resolverlo:

Caso 1: $m=1 \Rightarrow x+y=1\} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y=y \end{cases}$

Caso 2: $m=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-\frac{1}{2}y=-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x+y=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y+mz=1 \\ my-z=-1 \\ x+2my=0 \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores de *m*.
b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = -m^2+2m-1=0 \Rightarrow m=1$$

A continuación, calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$m=1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m\neq 1$	3	3	S. Compatible determinado

b) Vamos a resolverlo:

$$m=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1-z \\ y=-1+z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=2-2z \\ y=-1+z \\ z=z \end{cases}$$

Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} ax+y+z= \quad 4 \\ x-ay+z= \quad 1 \\ x+y+z=a+2 \end{array}\right\}$

a) Resuélvelo para el valor de *a* que lo haga compatible indeterminado.
b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a=-2$.
MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2+1+1+a-1-a = -a^2+1 \Rightarrow a=1 \ ; \ a=-1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$a=1$	2	3	S. Incompatible
$a=-1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$a\neq 1 \ y \ -1$	3	3	S. Compatible Determinado

Vamos a resolverlo para $a=-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{5-2z}{2} \\ z=z \end{array}\right.$

b) $a=-2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Luego lo resolvemos por Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} \ ; \ y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \ ; \ z=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$