

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ 3y + 2z = 2\lambda + 3 \\ 3x + (\lambda - 1)y + z = \lambda \end{cases}$$

a) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

b) Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.

c) ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$?

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

b) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda - 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 9 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda \neq 1$	3	3	S. Compatible Determinado

Luego, el sistema tiene solución única si $\lambda \neq 1$.

a) Vamos a resolverlo para $\lambda = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-t}{3} \\ y = \frac{5-2t}{3} \\ z = t \end{cases}$$

c) Sustituimos la solución en el sistema.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = \lambda + 1 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 2\lambda + 3 \\ 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (\lambda - 1) \cdot 0 + \frac{1}{2} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Luego, vemos que para $\lambda = -1$, la solución del sistema es: $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

$$\left. \begin{array}{l} kx + 2y = 3 \\ \text{Dado el sistema de ecuaciones: } -x + 2kz = -1 \\ 3x - y - 7z = k + 1 \end{array} \right\}$$

a) Estudia el sistema para los distintos valores del parámetro k .

b) Resuélvelo para $k = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 2k^2 + 12k - 14 = 0 \Rightarrow k = 1; k = -7$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	$R(A)$	$R(M)$	
$k = 1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k = -7$	2	3	S. Incompatible
$k \neq 1 \text{ y } -7$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $k = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ -x + 2z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ -x = -1 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

Considera el sistema de ecuaciones:
$$\left. \begin{array}{l} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = 2 \\ x - 2y - z = k+1 \end{array} \right\}$$

a) Clasifícalo según los distintos valores de k .

b) Resuélvelo para $k = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = k^2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 0 ; k = 2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	$R(A)$	$R(M)$	
$k = 0$	2	3	S. Incompatible
$k = 2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k \neq 0 \text{ y } 2$	3	3	S. Compatible determinado

b) $k = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = -1 - 2z \\ 2x + y = 2 - z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7-z}{5} \\ y = \frac{-4-3z}{5} \\ z = z \end{cases}$$

Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + ky + 2z = k + 1 \\ x + 2y + kz = 3 \\ (k+1)x + y + z = k + 2 \end{array} \right\}$$

- a) Determina los valores de k para los que el sistema tiene más de una solución.
b) ¿Existe algún valor de k para el cual el sistema no tiene solución?
c) Resuelve el sistema para $k = 0$

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \\ k+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^3 + k^2 - 6k = 0 \Rightarrow k = 0 ; k = 2 ; k = -3$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$k = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k = 2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k = -3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k \neq 0, 2 \text{ y } -3$	3	3	S. Compatible determinado

- b) No hay ningún valor de k para el cual el sistema no tenga solución.

- c) $k = 0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ x + 2y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - 2z \\ x + 2y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = 1 + z \\ z = z \end{cases}$$

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro?. ¿Y el de la calculadora?. Razona las respuestas.

b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50%, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Llamamos x = Precio del libro, y = Precio de la calculadora, z = Precio del estuche

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 2, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2y + 2z = 114 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 114 \Rightarrow x = 38 \text{ €}$$

Luego, el precio del libro es 38 €.

Vamos a ver si podemos calcular el precio de la calculadora:

$$\left. \begin{array}{l} 38 + y + z = 57 \\ 38 - 2y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 19 \\ -2y - 2z = -38 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No podemos, ya que es un sistema compatible}$$

indeterminado y tiene infinitas soluciones.

b) Planteamos el sistema con la nueva ecuación que nos dan y lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x = 2(y + z) \\ 0'5x + 0'8y + 0'75z = 34 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 50x + 80y + 75z = 3400 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 38 \text{ €}; y = 15 \text{ €}; z = 4 \text{ €}$$

Considera el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ 2x + ky = 1 \\ y + 2z = k \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro k .

b) Resuélvelo para $k = 1$.

c) Resuélvelo para $k = -1$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k + 2k - 4 = 0 \Rightarrow k = 1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	$R(A)$	$R(M)$	
$k = 1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k \neq 1$	3	3	S. Compatible determinado

b) $k = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 1 - 2z \\ z = z \end{cases}$$

c) $k = -1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y = 1 \\ y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = 0; z = -\frac{1}{2}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas $\left. \begin{array}{l} kx + 2y = 2 \\ 2x + ky = k \\ x - y = -1 \end{array} \right\}$

- a) Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k .
b) Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
c) Halla las soluciones en cada caso.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz ampliada del sistema

$$|M| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -k^2 + 2k - 4 - 2k + 4 + k^2 = 0$$

Luego, el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada y el sistema siempre es compatible para cualquier valor del parámetro k .

b) Calculamos el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k = \pm 2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	$R(A)$	$R(M)$	
$k = 2$	2	2	S. Compatible Determinado
$k = -2$	1	1	S. Compatible Indeterminado
$k \neq 2 \text{ y } -2$	2	2	S. Compatible Determinado

Resolvemos el sistema para $k = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} -2x + 2y = 2 \\ x = x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = \frac{2+2x}{2} = 1+x \end{cases}$$

Resolvemos el sistema para $k \neq -2$.

$$\left. \begin{array}{l} kx + 2y = 2 \\ 2x + ky = k \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ k & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}} = \frac{0}{k^2 - 4} = 0 \\ y = \frac{\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}} = \frac{k^2 - 4}{k^2 - 4} = 1 \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas

$$\left. \begin{aligned} x - y &= \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z &= \lambda \\ -x - y + \lambda z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

a) Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ .

b) Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0; \lambda = -1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	S. Compatible Determinado
$\lambda = -1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$.

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 0 \\ -x - y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema para $\lambda = -1$.

$$\left. \begin{aligned} x - y &= -1 \\ -2y - z &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + y \\ y = y \\ z = 1 - 2y \end{cases}$$