

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^t A = B^t$, donde X^t , B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los valores de m .

MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos el sistema que nos dicen:

$$(x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2m^2-1 \ m \ 1) \Rightarrow \begin{cases} (2-m)x + y + mz = 2m^2-1 \\ x + my + z = m \\ (2m-1)x + y + z = 1 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m - m^2 + 2m - 1 + m - 2m^3 + m^2 - 1 - 2 + m = -2m^3 + 6m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1; m = -2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 1$

Para $m = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 1$

Para $m = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1-4F_2 \\ F_3+5F_2}]{F_1-4F_2} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = -2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1-4F_2 \\ F_3+5F_2}]{F_1-4F_2} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 & 15 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -9 & 6 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 & 15 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$

	R(A)	R(M)	
$m = 1$	1	1	Sistema compatible indeterminado
$m = -2$	2	3	Sistema incompatible
$m \neq 1 \text{ y } -2$	3	3	Sistema compatible determinado

Dado el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} mx - y + 13z = 0 \\ 2x - my + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

a) Encuentra los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Resuelve el sistema para $m = 3$. En este caso, ¿hay alguna solución en la que $x = 10$? Razona tu respuesta.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 13 \\ 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7m^2 + 9m + 36 = 0 \Rightarrow m = 3; m = -\frac{12}{7}$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	
$m = 3$	2	S. Compatible indeterminado
$m = -\frac{12}{7}$	2	S. Compatible indeterminado
$m \neq 3 \text{ y } -\frac{12}{7}$	3	S. Compatible determinado

Luego, el sistema tiene infinitas soluciones para $m = 3$ y $m = -\frac{12}{7}$

b) Para $m = 3$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\begin{cases} 3x - y + 13z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -13z \\ 2x - 3y = -4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

Si $x = 10 \Rightarrow -5t = 10 \Rightarrow t = -2$. Luego la solución es: $x = 10$; $y = 4$; $z = -2$

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Encuentra los valores de a para los que el sistema dado por $AX = 2X$ tiene infinitas soluciones.

b) Para $a = 0$, si es posible, resuelve $AX = 2X$.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$a) AX = 2X \Rightarrow AX - 2X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (a-2)x + y + z = 0 \\ x + (a-2)y + z = 0 \\ x + y + (a-2)z = 0 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 \end{vmatrix} = a^3 - 6a^2 + 9a = 0 \Rightarrow a = 0 ; a = 3$$

$$\text{Para } m = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2F_2 + F_1 \\ 2F_3 + F_1}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } m = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 1$$

	R(A)	
$a = 0$	2	S. Compatible indeterminado
$a = 3$	1	S. Compatible indeterminado
$a \neq 0 \text{ y } 3$	3	S. Compatible Determinado

c) Resolvemos el sistema para $a = 0$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -t \\ -2x + y = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 4 \\ -\lambda x + y + z = 1 \\ x + y + z = \lambda + 3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de λ .

b) Resuelve el sistema, si es posible, para $\lambda = 1$

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \lambda = -1$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

$$\text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1}} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1}} M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$$

$$\text{Para } \lambda = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

Para

$$\lambda = -1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\lambda = -1$	2	3	Sistema incompatible
$\lambda \neq 1 \text{ y } -1$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $\lambda = 1$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 - t \\ -x + y = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{5 - 2t}{2} \\ z = t \end{cases}$$

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A según los valores de m .

b) Sabiendo que para $m=1$ el sistema dado por $AX = B$ tiene solución, encuentra k y resuélvelo.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

Calculamos el rango de la matriz A .

$$\text{Para } m=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

Para $m \neq 1 \Rightarrow R(A) = 3$

b) Ya hemos visto que para $m=1 \Rightarrow R(A) = 2$. Como nos dicen que el sistema tiene solución, el rango de la matriz ampliada también tiene que ser 2, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k + 1 - 1 = 0 \Rightarrow k = 0$$

Luego, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -1 - t ; y = 1 ; z = t$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} mx + (m+1)z = m \\ my + z = m \\ y + mz = m \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m .

b) Resuélvelo, si es posible, para $m=1$.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & m+1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - m = 0 \Rightarrow m = 0; m = 1; m = -1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

Para $m=0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$; $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

Para $m=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$; $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

Para $m=-1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m=-1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$

	$R(A)$	$R(M)$	
$m=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m=-1$	2	3	S. Incompatible
$m \neq 0, 1 \text{ y } -1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $m=1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (m+2)x + y - z = m \\ 3x + (m+2)y + z = m \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m .

b) Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 + 8m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = -4$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2$ para $m = 0$ y $m = -4$

Si $m = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

$m = -4 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_3 + 5F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $\Rightarrow R(M) = 3$

	$R(A)$	$R(M)$	
$m = 0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m = -4$	2	3	S. Incompatible
$m \neq 0$ y -4	3	3	S. Compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $m = 0$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -2z \\ 2x + y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -5z \\ z = z \end{cases}$$

Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Llamamos x = ángulo menor
 y = ángulo mayor
 z = otro ángulo

Planteamos y resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{y}{2} \\ x + y = 2z \\ x + y + z = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + y + z = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 40^\circ ; y = 80^\circ ; z = 60^\circ$$