

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 7
- Reserva 1, Ejercicio 7
- Reserva 2, Ejercicio 3
- Reserva 3, Ejercicio 3
- Reserva 4, Ejercicio 3
- Septiembre, Ejercicio 3
- Septiembre, Ejercicio 7

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) (1'25 puntos) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a .

b) (1'25 puntos) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$.

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 7.

RESOLUCIÓN

$$a) AX = B \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + z = 2a \\ 4x + y + 4z = 3a \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 4 - 1 = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a \\ 4 & 1 & 3a \end{vmatrix} = 8a + a - 3a - 2a = 4a = 0 \Rightarrow a = 0$$

	R(A)	R(M)	
$a = 0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$a \neq 0$	2	3	S. Incompatible

b) Para $a = 0$, el sistema es: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

Veamos si es posible que una solución sea: $y + z = 4 \Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

Luego, la solución es $x = -4$; $y = 0$; $z = 4$

(2'5 puntos) Siendo λ un número real, considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales con

$$\left. \begin{array}{l} x + \lambda y = 2 \\ \text{dos incógnitas } 2x + 4y = 1 \\ \lambda x + y = 2\lambda \end{array} \right\}$$

Discútelo según los valores de λ y resuélvelo cuando sea posible.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el determinante de la matriz ampliada del sistema y lo igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ \lambda & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda - 4\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow -3\lambda^2 + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1; \lambda = 1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

Para $\lambda = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Para $\lambda = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Para $\lambda = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

Para $\lambda = -1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 1$	2	2	S. Compatible determinado
$\lambda = -1$	2	2	S. Compatible determinado
$\lambda \neq -1, 1$	2	3	S. Incompatible

Lo resolvemos para $\lambda = 1$. El sistema es $\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x + 4y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{7}{2}; y = -\frac{3}{2}$

Lo resolvemos para $\lambda = -1$. El sistema es $\left. \begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x + 4y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{2}$

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned} \right\}$$

a) (1'75 Puntos). Discútelo según los valores de a .

b) (0'75 Puntos). Resuelve, si es posible, el sistema para $a = 1$ y $a = -2$.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1; a = -2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 1$

Para $a = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 1$

Para $a = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Para $a = -2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$, ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$

	R(A)	R(M)	
$a = 1$	1	1	Sistema compatible indeterminado
$a = -2$	2	3	Sistema incompatible
$a \neq 1$ y -2	3	3	Sistema compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$. El sistema es

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - \lambda - \mu; y = \lambda; z = \mu$$

Para $a = -2$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

Considera $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) (0'75 Puntos) Determina los valores de m para los que $A \cdot B$ no tiene inversa.

b) (0'75 Puntos) Determina los valores de m para los que $B \cdot A$ no tiene inversa.

b) (1 Punto) Para $m = 0$, resuelve, si es posible, el sistema dado por $B \cdot A \cdot X = C$ y halla una solución en la que $x + y + z = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & m+1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 2 & m+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2m - 2 = -2m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Luego, no tiene inversa para $m = 0$.

b) Calculamos la matriz $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2+m & -1 & -1+m \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2+m & -1 & -1+m \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 3 + 3m - 2 + m + 3 + 4 - 2m + 2 - 2m = 0$$

Luego, no tiene inversa para cualquier valor de m , ya que el determinante siempre vale 0.

c) El sistema es: $B \cdot A \cdot X = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -2x - y - z = -2 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$

Resolvemos el sistema por Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 + F_1 \\ 2F_3 - 3F_1}} \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Nos piden una solución en la que $x + y + z = 0$, luego:

$$1 - t + t + t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow (2, -1, -1)$$

Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} -my + z = 1 \\ 5x + 2y + mz = 0 \\ my + (m - 3)z = -3 \end{cases}$$

a) (1'25 Puntos). Discute el sistema en función de m .

b) (1'25 Puntos). Para $m = 0$, resuelve el sistema. Calcula, si es posible, una solución en la que $y = 5$.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 4. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -m & 1 \\ 5 & 2 & m \\ 0 & m & m-3 \end{vmatrix} = 5m + 5m^2 - 15m = 5m^2 - 10m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = 2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

Para $m = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$, ya que al añadir la columna de los términos independientes es

igual a la columna de los coeficientes de z , por lo tanto, tiene el mismo rango que A

Para $m = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$

	R(A)	R(M)	
$m = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m = 2$	2	3	S. Incompatible
$m \neq 0, y \neq 2$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $m = 0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left. \begin{matrix} z = 1 \\ 5x + 2y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{5t}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

Si $y = 5 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow x = -2 ; y = 5 ; z = 1$

Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) (1'5 puntos) Discute el sistema según los valores de m .

b) (1 punto) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{vmatrix} = -12 + m^2 + 2m - 6m + 2m + 4 = m^2 - 2m - 8 \Rightarrow m = 4 \quad y \quad m = -2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m = 4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

Para $m = 4 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

Para $m = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$

Para $m = -2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

	R(A)	R(M)	
$m = 4$	2	3	Sistema incompatible
$m = -2$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m \neq 4$ y -2	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m = -2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 2 \\ -2x + 4y - 2z = -4 \\ -3z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 2 \\ -3z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t - z = \frac{7}{3} + 2t \\ y = t \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

No existe ninguna solución con $z = 0$.

www.emestrada.org

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) (1'25 puntos) Halla los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1'25 puntos) Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(A - \lambda I)X = 0$. ¿Existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 7

RESOLUCIÓN

a) Calculamos la matriz $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \lambda = -1; \lambda = 2$$

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0; z = 0$$

Luego, no hay ninguna solución $z = 1$