EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2007

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz $B=A^2-2A$.
b) Determina los valores de λ **para los que la matriz** ***B*** **tiene inversa.**
c) Calcula B^{-1} **para** $\lambda=1$.
MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de *B*.

$$|B|=\begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-2\lambda-1 \end{vmatrix}=-\lambda^2+2\lambda+3=0\Rightarrow\lambda=-1\ ;\ \lambda=3$$

Luego tiene inversa para todos los valores de $\lambda\neq-1\ y\ 3$

c) Calculamos la matriz inversa de $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$B^{-1}=\frac{(B^d)^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^t}{4}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{4}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$
a) Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.
b) Para $\alpha=1$, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial $A\cdot X=B$.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*.

$$\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3\alpha-2=0\Rightarrow\alpha=\frac{2}{3}$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de $\alpha\neq\frac{2}{3}$.

b) Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor de m para el que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ verifica la relación $2A^2 - A = I$ y determina A^{-1} para dicho valor de m.
b) Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$2A^2 - A = I \Rightarrow 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2m+1=0 \\ 2m^2 - m = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{-\frac{1}{2}} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$2M^2 - M = I \Rightarrow 2M^2 \cdot M^{-1} - M \cdot M^{-1} = I \cdot M^{-1} \Rightarrow M^{-1} = 2M - I$$

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A-2I$ es cero.
b) Calcula la matriz inversa de $A-2I$ para $\lambda=-2$.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A-2I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow \lambda=2\ ;\ \lambda=1\ ;\lambda=-1$$

b) Calculamos la matriz inversa de $A-2I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{((A-2I)^d)^t}{|A-2I|}=\frac{\begin{pmatrix} -4 & 15 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 15 & -4 \end{pmatrix}^t}{12}=\frac{\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}}{12}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Sean I la matriz identidad de orden 2 y $A=\begin{pmatrix}1 & m\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

a) Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A-I)^2=O$, donde O es la matriz nula de orden 2.

b) Para m = 2, halla la matriz X tal que $AX-2A^t=O$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{pmatrix}0 & m\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & m\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow m=0$$

b) Calculamos el determinante de *B*.

$$AX-2A^t=O\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ a+c & b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+2c=2\\ a+c=4\\ b+2d=2\\ b+d=2\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$