

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz P que verifica $A \cdot P - B = C^t$ (C^t es la matriz traspuesta de C).
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$A \cdot P - B = C^t \Rightarrow A \cdot P = C^t + B \Rightarrow P = A^{-1} \cdot (C^t + B)$$

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = A^{-1} \cdot (C^t + B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula, si existe, el valor de k para el

cual $(A - kI)^2$ es la matriz nula.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k=1$$

Igualando cada expresión a cero tenemos tendríamos nueve ecuaciones. La única que verifica todas las expresiones es $k=1$.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula, si existen, la matriz inversa de A y la de B .

b) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz B no tiene inversa, ya que su determinante vale cero.

b)

$$A \cdot X + B = A + I \Rightarrow A \cdot X = A + I - B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (A + I - B)$$

$$X = A^{-1} \cdot (A + I - B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k .

b) Para $k = 0$, halla la matriz inversa de A .

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El rango de A es al menos 2, ya que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$ es distinto de cero. Vamos a calcular el determinante de A .

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix} = 4k^2 - 12 = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}$$

- Si $k = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$ el rango de A es 2.

- Si $k \neq \pm\sqrt{3} \Rightarrow$ el rango de A es 3.

b) Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -21 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t}{-12} = \frac{\begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}}{-12} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$