

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Indica los valores de m para los que A es invertible.

b) Resuelve la ecuación $XA - B^t = C$ para $m = 0$. (B^t es la matriz traspuesta de B)

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, luego:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1; m = 3$$

Por lo tanto, la matriz A tendrá inversa para todos los valores de $m \neq 1$ y $m \neq 3$.

b) Calculamos la matriz inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 12 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz X .

$$XA - B^t = C \Rightarrow X = (C + B^t) \cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$

b) Calcula A^{-1} . (Sugerencia: Puedes usar la igualdad del apartado (a)).

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{aligned} 2A - A^2 &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) De la igualdad del apartado a se deduce que:

$$2A - A^2 = I \Rightarrow A \cdot (2I - A) = I \Rightarrow A^{-1} = 2I - A$$

Luego: $A^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Considera las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1} .

b) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$(A)^{-1} = \frac{(A^t)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} -a+2c & -b+2d \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} a-2c-2b+4d & -b+2d \\ -c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} a-2c-2b+4d & -b+2d \\ -c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{aligned} a-2c-2b+4d &= -1 \\ -b+2d &= 0 \\ -c+2d &= 2 \\ d &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -1; b = 2; c = 0; d = 1 \end{aligned}$$

Luego: $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obtén un vector no nulo $v = (a, b, c)$, de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Para que el rango $(A) = \text{rango}(B) = 2$, sus determinantes deben valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = b + a - c - b = a - c = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} = -2c + 3a - 2b = 0$$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $\begin{cases} a - c = 0 \\ 3a - 2b - 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = c ; b = \frac{c}{2} ; c = c$

Luego, el vector que nos piden es $v = \left(c, \frac{c}{2}, c \right)$, siendo c cualquier número distinto de cero.

De la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que $\det(A) = 4$. Se pide:

a) Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indica las propiedades que utilizas.

b) Calcula $\det(A^{-1} \cdot A^t)$

c) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, siendo I la matriz identidad, halla $\det(B)$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\det(-3A^t) = (-3)^2 \det(A^t) = 9 \cdot \det(A) = 9 \cdot 4 = 36$$

$$\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) \det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = -6 \cdot (-1) \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 6 \cdot 4 = 24$$

Si en un determinante cambiamos dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

Si en un determinante hay un número que multiplica a una fila o columna, dicho número sale fuera multiplicando al determinante.

$$b) \det(A^{-1} \cdot A^t) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A^t) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A) = 1$$

$$c) \det(B^3) = \det(B \cdot B \cdot B) = \det(B) \cdot \det(B) \cdot \det(B) = [\det(B)]^3 = 1 \Rightarrow \det(B) = \sqrt[3]{1} = 1$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz X que cumpla la ecuación $AXB = C$

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

La ecuación que tenemos que resolver es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -a+d & -b+e & -c+f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b+c & -b+2c \\ -a+d & b-e-c+f & b-e-2c+2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=3 \\ -b+c=1 \\ -b+2c=2 \\ -a+d=0 \\ b-e-c+f=1 \\ b-e-2c+2f=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow a=3; d=3; c=1; b=0; f=-2; e=-4$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$