

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

- a) ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A ? Justifica la respuesta.
b) Para $k = 0$, resuelve la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Luego, la matriz A no tiene inversa para $k = \frac{1}{2}$, ya que su determinante vale cero.

- b) Calculamos la matriz inversa de A para $k = 0$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^t)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial:

$$(X + I) \cdot A = A^t \Rightarrow X \cdot A + I \cdot A = A^t \Rightarrow X \cdot A = A^t - I \cdot A$$

Si multiplicamos por A^{-1} a la derecha, tenemos:

$$X \cdot A = A^t - I \cdot A \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = A^t \cdot A^{-1} - I \cdot A \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^t \cdot A^{-1} - I$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$X = A^t \cdot A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica: $A \cdot X \cdot B = C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C .
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A \cdot X \cdot B = C^t \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de B

$$(B)^{-1} = \frac{(B^d)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra la matriz X que satisface la ecuación $XA + A^3B = A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la inversa de A :

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Calculamos la matriz X : Si multiplicamos por A^{-1} a la derecha, tenemos:

$$X \cdot A + A^3B = A \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} + A^3 \cdot B \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \Rightarrow X = I_3 - A^3 \cdot B \cdot A^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = I_3 - A^3 \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.

b) Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 = 13 \neq 0 \Rightarrow$ Tiene inversa

Sabemos que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \Rightarrow |B| = \frac{|A \cdot B|}{|A|} = \frac{-13}{13} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Tiene inversa

b) Si multiplicamos por A a la izquierda, tenemos:

$$A^{-1}X - B = BA \Rightarrow A \cdot A^{-1}X - A \cdot B = ABA \Rightarrow X = ABA + AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 43 & -8 \end{pmatrix}$$