

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$

- a) Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.
b) Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de cada matriz y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = -m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

	R(A)
$m = -4$	1
$m \neq -4$	2

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = -4$$

	R(B)
$m = 0$	2
$m = -4$	2
$m \neq 0$ y -4	3

Luego, para $m = 0$ el rango de A es igual al rango de B y vale 2.

b) Igualamos los dos determinantes

$$-m - 4 = m^2 + 4m \Rightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \Rightarrow m = -1 ; m = -4$$

Luego, para $m = -1$ y $m = -4$, el $\det(A) = \det(B)$

Halla la matriz X que verifica la igualdad $A \cdot X \cdot A^{-1} + B = C \cdot A^{-1}$ sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos la matriz X

$$\begin{aligned} A \cdot X \cdot A^{-1} + B &= C \cdot A^{-1} \Rightarrow A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A + B \cdot A = C \cdot A^{-1} \cdot A \Rightarrow A \cdot X \cdot I + B \cdot A = C \cdot I \Rightarrow A \cdot X + B \cdot A = C \Rightarrow \\ \Rightarrow A \cdot X &= C - B \cdot A \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A) \end{aligned}$$

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot (C - B \cdot A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$

a) Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2.

b) Para $m=1$, determina A^{2015} .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix} = -m^3 + 2m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = 1$$

Si $m=0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y como el $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

Si $m=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y como el $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

b) Si $m=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego: $A^{2015} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla el determinante de una matriz X que verifique la igualdad $X^2 \cdot A \cdot X = B$.

b) Determina, si existe, la matriz Y que verifica la igualdad $A^2 \cdot Y \cdot B^{-1} = A$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$X^2 \cdot A \cdot X = B \Rightarrow |X^2 \cdot A \cdot X| = |B| \Rightarrow |X| \cdot |X| \cdot |A| \cdot |X| = |B| \Rightarrow |X|^3 = \frac{|B|}{|A|} = \frac{8}{-1} \Rightarrow |X| = \sqrt[3]{-8} = -2$$

b) Despejamos la matriz Y , para ello multiplicamos por A^{-1} a la izquierda y por B a la derecha

$$A^2 \cdot Y \cdot B^{-1} = A \Rightarrow A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot A \cdot Y \cdot B^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B \Rightarrow A^{-1} \cdot I \cdot A \cdot Y \cdot I = A^{-1} \cdot I \cdot B \Rightarrow Y = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz Y

$$Y = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz X que verifica $A \cdot X - B = I$ (I denota la matriz identidad de orden 3).

b) Calcula el determinante de la matriz $(A^2 \cdot B^{-1})^{2015}$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos la matriz X , para ello multiplicamos por A^{-1} a la izquierda

$$A \cdot X - B = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X - A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot I \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (B + I)$$

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot (B + I) &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Calculamos el determinante de A y de B

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 ; \quad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|A^2 \cdot B^{-1}|^{2015} = (|A| \cdot |A| \cdot |B^{-1}|)^{2015} = \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{|B|} \right)^{2015} = \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \right)^{2015} = 1$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz X para la que $A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C$, (A^t la matriz traspuesta de A).

b) Calcula el determinante de $B^{-1}(C^t \cdot C) \cdot B$, (C^t la matriz traspuesta de C).

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos la matriz X

$$A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C \Rightarrow (A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X \cdot B^{-1} \cdot B = (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B \Rightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$(A^t)^{-1} = \frac{((A^t)^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$\begin{aligned} X &= (A^t)^{-1} \cdot C \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -21 & 10 & 0 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & \frac{10}{3} & 0 \\ -3 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} |B^{-1} \cdot (C^t \cdot C) \cdot B| &= |B^{-1}| \cdot |C^t \cdot C| \cdot |B| = \frac{1}{|B|} \cdot |C^t \cdot C| \cdot |B| = |C^t \cdot C| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \left| \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0 \end{aligned}$$